解析函数的级数表示

呜哩天才琪露诺

泌阳县第一高级中学

日期：2022 年 1 月 28 日

目录

1 复序列 **1**

1.1 定义与收敛性 1

2 复项级数 **2**

2.1 基本概念 2

2.2 绝对收敛与条件收敛 2

3 幂级数 **3**

3.1 基本定义 3

3.2 Abel 定理 3

3.3 收敛半径的求法 4

3.4 幂级数的性质 4

4 泰勒展开 **5**

4.1 泰勒定理 5

4.2 展开方法 5

5 洛朗展开 **6**

5.1 洛朗定理 6

5.2 展开方法 6

1 复序列

1.1 定义与收敛性

定义 1.1 (复序列的极限)**.**

$$\lim_{n\to\infty} z_n = a \iff \forall \varepsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N},\ \text{s.t.}\ \forall n > N,\ |z_n - a| < \varepsilon \tag{1}$$

定理 1.1 (极限与实部虚部)**.** 设 $z_n = x_n + iy_n$，则

$$\lim_{n\to\infty} z_n = a = \alpha + i\beta \iff \lim_{n\to\infty} x_n = \alpha, \quad \lim_{n\to\infty} y_n = \beta \tag{2}$$

例 1.1. 讨论 $z_n = i^n + \dfrac{i}{n}$ 的敛散性.

由

$$z_n = i^n + \frac{i}{n} = e^{n\frac{i\pi}{2}} + \frac{i}{n} = \cos\frac{n\pi}{2} + i\left(\sin\frac{n\pi}{2} + \frac{1}{n}\right) \tag{3}$$

可知实部和虚部均发散，故 $\{z_n\}$ 发散.

2 复项级数

2.1 基本概念

定义 2.1 (复项级数)**.** 设 $\{z_n\}$ 为复序列，称 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} z_n$ 为复项级数，$s_n = \sum\limits_{k=1}^{n} z_k$ 为部分和. 若 $\lim\limits_{n\to\infty} s_n = s$ 存在，则称级数收敛，s 为级数的和.

定理 2.1 (收敛的充要条件)**.** 设 $z_n = x_n + iy_n$，则

$$\sum_{n=1}^{\infty} z_n \text{ 收敛} \iff \sum_{n=1}^{\infty} x_n \text{ 和} \sum_{n=1}^{\infty} y_n \text{ 都收敛} \tag{4}$$

定理 2.2 (收敛的必要条件)**.** 若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} z_n$ 收敛，则 $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = 0$.

2.2 绝对收敛与条件收敛

定义 2.2 (绝对收敛与条件收敛)**.** 若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |z_n|$ 收敛，则称 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} z_n$ **绝对收敛**. 若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} z_n$ 收敛而非绝对收敛，则称其**条件收敛**.

定理 2.3. 绝对收敛的级数必收敛.

例 2.1. 讨论 $z_n = \dfrac{1}{n} + \dfrac{i}{2^n}$ 的敛散性.

因 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{2^n}$ 收敛而 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n}$ 发散，故原级数发散.

例 2.2. 讨论 $z_n = \dfrac{i^n}{n^2}$ 的敛散性.

由

$$z_n = \frac{i^n}{n^2} = \frac{1}{n^2}\cos\frac{n\pi}{2} + \frac{i}{n^2}\sin\frac{n\pi}{2} \tag{5}$$

可知实部和虚部对应的级数均收敛，故原级数收敛.

例 2.3. 讨论 $z_n = \dfrac{i^n}{\sqrt{n}}$ 的敛散性.

因

$$\sum_{n=1}^{\infty} |z_n| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} \tag{6}$$

发散，故原级数非绝对收敛. 但由莱布尼茨判别法，

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}\cos\frac{n\pi}{2}, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}\sin\frac{n\pi}{2} \tag{7}$$

均收敛，故原级数条件收敛.

3 幂级数

3.1 基本定义

定义 3.1 (复变函数项级数与幂级数)**.** 设函数 $f_n(z)$ 在区域 D 内有定义，则称 $\{f_n(z)\}$ 为 D 内的复变函数序列，$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z)$ 为 D 内的复变函数项级数，$s_n(z)=\sum_{k=1}^{n} f_k(z)$ 为部分和. 若对 $z_0\in D$，$\lim_{n\to\infty} s_n(z_0)$ 存在，则称级数在 z_0 收敛.

形如

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-a)^n \tag{8}$$

的级数称为**幂级数**，其中 a_n 为复常数.

3.2 Abel 定理

定理 3.1 (Abel 定理)**.** 设 $S=\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$.

1. 若 S 在 z_1 收敛，则 S 在 $|z-z_0|<|z_1-z_0|$ 上绝对收敛.
2. 若 S 在 z_1 发散，则 S 在 $|z-z_0|>|z_1-z_0|$ 上发散.

证明. 因 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z_1-z_0)^n$ 收敛，故 $\lim_{n\to\infty} a_n(z_1-z_0)^n=0$，从而 $\exists M$ 使得 $|a_n(z_1-z_0)^n|\le M$.

于是

$$|a_n(z-z_0)^n|=|a_n(z_1-z_0)^n|\cdot\left|\frac{z-z_0}{z_1-z_0}\right|^n\le Mq^n \tag{9}$$

其中 $q<1$. 故 $\sum_{n=0}^{\infty} Mq^n$ 收敛，从而原级数绝对收敛. □

由此可知，幂级数的收敛域为圆域，其半径 R 称为**收敛半径**.

例 3.1. 讨论 $\sum_{n=0}^{\infty}(nz)^n$ 的敛散性.

对任意 $z\neq 0$，$\lim_{n\to\infty}(nz)^n\neq 0$，故仅在 $z=0$ 处收敛，$R=0$.

例 3.2. 讨论 $\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z}{n}\right)^n$ 的敛散性.

对任意固定 z，存在 N 使得当 $n>N$ 时 $|z|/n<1/2$，故

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{|z|}{n}\right)^n<1+|z|+\cdots+\left(\frac{|z|}{N}\right)^N+\left(\frac{1}{2}\right)^{N+1}+\left(\frac{1}{2}\right)^{N+2}+\cdots \tag{10}$$

收敛，故 $R=+\infty$.

例 3.3. 讨论 $\sum_{n=0}^{\infty} z^n$ 的敛散性.

部分和

$$s_n=1+z+z^2+\cdots+z^n=\frac{1-z^{n+1}}{1-z}\quad(z\neq 1) \tag{11}$$

当 $|z|<1$ 时，$\lim_{n\to\infty} s_n=\frac{1}{1-z}$，原级数收敛；当 $|z|\ge 1$ 时，$\lim_{n\to\infty} z^n\neq 0$，原级数发散.

故 $R=1$，和函数 $s(z)=\frac{1}{1-z}$.

3.3 收敛半径的求法

对 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$：

1. 比值法：若 $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \lambda$，则 $R = \dfrac{1}{\lambda}$.
2. 根值法：若 $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \rho$，则 $R = \dfrac{1}{\rho}$.

例 3.4. 求 $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{z^n}{n^2}$ 的收敛半径.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2}{(n+1)^2} = 1 \tag{12}$$

故 $R = 1$，收敛圆为 $|z| < 1$.

例 3.5. 求 $\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^{n^2} (z-1)^n$ 的收敛半径.

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e \tag{13}$$

故 $R = \dfrac{1}{e}$，收敛圆为 $|z-1| < \dfrac{1}{e}$.

3.4 幂级数的性质

定理 3.2 (计算性质)**.** 设

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n, \quad |z| < r_1, \qquad g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n, \quad |z| < r_2 \tag{14}$$

令 $r = \min\{r_1, r_2\}$，在 $|z| < r$ 内有

$$f(z) \pm g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (a_n \pm b_n) z^n \tag{15}$$

$$f(z)g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k} \right) z^n \tag{16}$$

定理 3.3 (分析性质)**.** 设 $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$，$|z - z_0| < R$，则：

1. $f(z)$ 在圆域 $|z - z_0| < R$ 内解析.
2. $f'(z) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n (z - z_0)^{n-1}$.
3. $F(z) = \int_{z_0}^{z} f(z)\,\mathrm{d}z = \sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{a_n}{n+1} (z - z_0)^{n+1}$.

定理 3.4 (代换性质)**.** 设 $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ 在 $|z| < R$ 内收敛，$g(z)$ 在 $|z| < r$ 内解析且 $|g(z)| < R$，则当 $|z| < r$ 时，

$$f[g(z)] = \sum_{n=0}^{\infty} a_n [g(z)]^n \tag{17}$$

例 3.6. 将 $\dfrac{1}{(1-z)^2}$ 展开为幂级数.

法一（乘法）：

$$\frac{1}{(1-z)^2} = (1+z+z^2+\cdots)(1+z+z^2+\cdots) = 1+2z+3z^2+\cdots \tag{18}$$

法二（求导）：

$$\frac{1}{(1-z)^2} = \left(\frac{1}{1-z}\right)' = (1+z+z^2+\cdots)' = 1+2z+3z^2+\cdots \tag{19}$$

4 泰勒展开

4.1 泰勒定理

定理 4.1 (泰勒定理)**.** 设 $f(z)$ 在区域 D 内解析，C 为 D 的边界，$z_0 \in D$，$R = \min\limits_{z\in C}|z-z_0|$，则当 $|z-z_0| < R$ 时，

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n \tag{20}$$

其中

$$a_n = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} = \frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}\,\mathrm{d}z \tag{21}$$

评论. 1. 幂级数的收敛域一定是圆域，故解析函数不能在整个解析域上展开为泰勒级数.

2. 泰勒展开具有唯一性.

3. 收敛半径 R 为 z_0 到最近的奇点的距离.

4.2 展开方法

1. 直接展开：利用 $a_n = \dfrac{f^{(n)}(z_0)}{n!}$ 或 $a_n = \dfrac{1}{2\pi i}\oint_C \dfrac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}\,\mathrm{d}z$.
2. 间接展开：利用已知展开式，通过有理运算、代换、逐项求导或逐项积分.

例 4.1. 将 $f(z) = e^z$ 在 $z = 0$ 处展开.

因 $f^{(n)}(0) = e^z\big|_{z=0} = 1$，故 $a_n = \dfrac{1}{n!}$，从而

$$e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}, \qquad |z| < +\infty \tag{22}$$

同理可得

$$\sin z = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}, \qquad \cos z = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!}, \qquad |z| < +\infty \tag{23}$$

例 4.2. 将 $f(z) = \dfrac{1}{(1-z)^2}$ 在 $z = i$ 处展开.

$f(z)$ 的奇点为 $z = 1$，故收敛半径 $R = |1-i| = \sqrt{2}$.

首先在 $z = i$ 展开 $\dfrac{1}{1-z}$：

$$\frac{1}{1-z} = \frac{1}{(1-i)-(z-i)} = \frac{1}{1-i}\cdot\frac{1}{1-\frac{z-i}{1-i}} \tag{24}$$

$$= \frac{1}{1-i}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z-i}{1-i}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(z-i)^n}{(1-i)^{n+1}} \tag{25}$$

其次，

$$\frac{1}{(1-z)^2}=\left(\frac{1}{1-z}\right)'=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n(z-i)^{n-1}}{(1-i)^{n+1}},\qquad |z-i|<\sqrt{2} \tag{26}$$

5 洛朗展开

5.1 洛朗定理

定义 5.1 (洛朗级数)**.** 形如

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty}a_n(z-z_0)^n=\cdots+a_{-1}(z-z_0)^{-1}+a_0+a_1(z-z_0)+a_2(z-z_0)^2+\cdots \tag{27}$$

的级数称为**洛朗级数**，可分为两部分：

$$\mathrm{A}:\sum_{n=0}^{+\infty}a_n(z-z_0)^n,\qquad \mathrm{B}:\sum_{n=-1}^{-\infty}a_n(z-z_0)^n \tag{28}$$

其中 A 的收敛域为 $|z-z_0|<R_2$，B 的收敛域为 $|z-z_0|>R_1$，故洛朗级数的收敛域为环域 $R_1<|z-z_0|<R_2$.

定理 5.1 (洛朗定理)**.** *若 $f(z)$ 在环域 $D:R_1<|z-z_0|<R_2$ 内解析，则 $f(z)$ 可在环域内展开为*

$$f(z)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}a_n(z-z_0)^n \tag{29}$$

其中

$$a_n=\frac{1}{2\pi i}\oint_C\frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}\,\mathrm{d}z,\qquad n=0,\pm1,\pm2,\cdots \tag{30}$$

C 为环域内绕 z_0 的任意一条闭约当曲线.

评论. 1. 洛朗级数的正幂部分称为**解析部分**，负幂部分称为**主要部分**.

2. 洛朗展开具有唯一性.
3. 在洛朗展开中，一般 $a_n\neq\dfrac{1}{n!}f^{(n)}(z_0)$.
4. 若 $f(z)$ 在 $0\le|z-z_0|<R$ 内解析，则洛朗展开式即为泰勒展开式.

5.2 展开方法

展开洛朗级数的关键是根据函数的奇点位置，将复平面划分为若干解析环域，在各环域内分别展开.

例 5.1. 将 $f(z)=\dfrac{1}{(z-1)(z-2)}$ 在 $z=0$ 处展开为洛朗级数.

$f(z)$ 的奇点为 $z=1$ 和 $z=2$，故 $\mathbb{C}$ 可分为三个解析环：

$$0\le|z|<1,\qquad 1<|z|<2,\qquad 2<|z|<+\infty \tag{31}$$

在 $0\le|z|<1$ 上，$\dfrac{1}{1-z}$ 和 $\dfrac{1}{2-z}$ 均可展开为泰勒级数：

$$f(z)=\frac{1}{1-z}-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1-\frac{z}{2}} \tag{32}$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}z^n-\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{2^n}=\sum_{n=0}^{\infty}\left(1-\frac{1}{2^{n+1}}\right)z^n \tag{33}$$

在 $1<|z|<2$ 上，$\dfrac{1}{1-z}$ 需展开为负幂级数，$\dfrac{1}{2-z}$ 可展开为泰勒级数：

$$f(z)=-\frac{1}{z}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{z}}-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1-\frac{z}{2}} \tag{34}$$

$$=-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{z^{n+1}}-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{2^{n+1}} \tag{35}$$

在 $2<|z|<+\infty$ 上，$\dfrac{1}{1-z}$ 和 $\dfrac{1}{2-z}$ 均需展开为负幂级数：

$$f(z)=-\frac{1}{z}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{z}}+\frac{1}{z}\cdot\frac{1}{1-\frac{2}{z}} \tag{36}$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^n-1}{z^{n+1}} \tag{37}$$