留数及其应用

呜哩天才琪露诺

泌阳县第一高级中学

日期：2026 年 1 月 29 日

目录

1 留数 **2**

1.1 留数的定义 2

1.2 留数定理 2

1.3 留数的计算法则 2

2 无穷远点处的留数 **2**

3 无穷远点处的留数 **3**

4 利用留数计算实定积分 **3**

4.1 大小圆弧引理与约当引理 3

4.2 形如 $\int_0^{2\pi} R(\cos\theta,\sin\theta)\,\mathrm{d}\theta$ 的积分 4

4.3 上半平面围道 4

4.4 锁孔围道 6

4.5 矩形围道 6

5 对数留数与辐角原理 **7**

5.1 对数留数 7

5.2 辐角原理 8

5.3 儒歇定理 8

6 伽马函数若干性质 **8**

6.1 伽马函数的积分表示 8

6.2 余元公式的证明 9

6.3 $\Gamma(1/2)$ 的求值 9

1 留数

1.1 留数的定义

定义 1.1 (留数)**.** 设 z_0 为 $f(z)$ 的孤立奇点，将 $f(z)$ 在 z_0 的去心邻域内展开为洛朗级数：

$$f(z)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}c_n(z-z_0)^n,\qquad 0<|z-z_0|<R \tag{1}$$

定义 $f(z)$ 在 z_0 处的**留数**为

$$\operatorname{Res}[f(z),z_0]=c_{-1}=\frac{1}{2\pi i}\oint_C f(z)\,\mathrm{d}z \tag{2}$$

其中 C 为包围 z_0 的任意正向闭曲线.

1.2 留数定理

定理 1.1 (留数定理)**.** 设 $f(z)$ 在区域 D 内除有限个孤立奇点 $z_1,z_2,\cdots,z_n$ 外处处解析，C 为 D 内包围诸奇点的正向闭曲线，则

$$\oint_C f(z)\,\mathrm{d}z=2\pi i\sum_{k=1}^{n}\operatorname{Res}[f(z),z_k] \tag{3}$$

1.3 留数的计算法则

1. 若 z_0 为 $f(z)$ 的一阶极点，则

$$\operatorname{Res}[f(z),z_0]=\lim_{z\to z_0}(z-z_0)f(z) \tag{4}$$

2. 若 z_0 为 $f(z)$ 的 m 阶极点，则

$$\operatorname{Res}[f(z),z_0]=\frac{1}{(m-1)!}\lim_{z\to z_0}\frac{\mathrm{d}^{m-1}}{\mathrm{d}z^{m-1}}\left[(z-z_0)^m f(z)\right] \tag{5}$$

3. 若 z_0 为 $f(z)=\dfrac{P(z)}{Q(z)}$ 的一阶极点，且 $P(z_0)\neq 0$，$Q(z_0)=0$，$Q'(z_0)\neq 0$，则

$$\operatorname{Res}[f(z),z_0]=\frac{P(z_0)}{Q'(z_0)} \tag{6}$$

例 1.1. 求 $I=\displaystyle\oint_{|z|=1/2}\frac{\mathrm{d}z}{z^{101}(1-z)}$.

$z=0$ 是 $f(z)=1/[z^{101}(1-z)]$ 的 101 阶极点. 将 $f(z)$ 在 $z=0$ 处展开为洛朗级数：

$$f(z)=\frac{1}{z^{101}}(1+z+z^2+\cdots)=\frac{1}{z^{101}}+\frac{1}{z^{100}}+\cdots+\frac{1}{z}+1+z+\cdots \tag{7}$$

由定义 $\operatorname{Res}[f(z),0]=1$，故 $I=2\pi i$.

2 无穷远点处的留数

定义 2.1. 若 $f(z)$ 在 $R<|z|<+\infty$ 内解析，C 为该环域内围绕原点的任意闭曲线，则 $f(z)$ 在无穷远点处的留数为

$$\operatorname{Res}[f(z),\infty]=\frac{1}{2\pi i}\oint_{C^-}f(z)\,\mathrm{d}z \tag{8}$$

其中 C^- 表示顺时针方向. 若 $f(z)=\displaystyle\sum_{n=-\infty}^{+\infty}c_n z^n$，则

$$\operatorname{Res}[f(z),\infty]=-c_{-1} \tag{9}$$

定理 2.1. *若 $f(z)$ 在扩充复平面上只有有限个孤立奇点，则所有奇点（包括 ∞）处的留数之和为 0.*

定理 2.2 (无穷远点留数的计算法则)**.**

$$\operatorname{Res}[f(z),\infty]=-\operatorname{Res}\left[\frac{1}{z^2}f\left(\frac{1}{z}\right),0\right] \tag{10}$$

例 2.1. 求 $I=\oint_{|z|=4}\dfrac{z^{15}}{(z^4+2)^3(z^2+1)^2}\,\mathrm{d}z$.

$f(z)$ 在 $|z|=4$ 内部有很多奇点，外部除 ∞ 外无奇点，故

$$I=-2\pi i\ \operatorname{Res}[f(z),\infty] \tag{11}$$

$$=2\pi i\ \operatorname{Res}\left[\frac{1}{z^2}f\left(\frac{1}{z}\right),0\right] \tag{12}$$

$$=2\pi i\ \operatorname{Res}\left[\frac{1}{z(1+2z^4)^3(1+z^2)^2},0\right]=2\pi i \tag{13}$$

3 无穷远点处的留数

定义 3.1. 若 $f(z)$ 在 $R<|z|<+\infty$ 内解析，C 为该环域内围绕原点的任意闭曲线，则 $f(z)$ 在无穷远点处的留数为

$$\operatorname{Res}[f(z),\infty]=\frac{1}{2\pi i}\oint_{C^-}f(z)\,\mathrm{d}z \tag{14}$$

其中 C^- 表示顺时针方向. 若 $f(z)=\sum\limits_{n=-\infty}^{+\infty}c_nz^n$，则

$$\operatorname{Res}[f(z),\infty]=-c_{-1} \tag{15}$$

定理 3.1. *若 $f(z)$ 在扩充复平面上只有有限个孤立奇点，则所有奇点（包括 ∞）处的留数之和为 0.*

定理 3.2 (无穷远点留数的计算法则)**.**

$$\operatorname{Res}[f(z),\infty]=-\operatorname{Res}\left[\frac{1}{z^2}f\left(\frac{1}{z}\right),0\right] \tag{16}$$

例 3.1. 求 $I=\oint_{|z|=4}\dfrac{z^{15}}{(z^4+2)^3(z^2+1)^2}\,\mathrm{d}z$.

$f(z)$ 在 $|z|=4$ 内部有很多奇点，外部除 ∞ 外无奇点，故

$$I=-2\pi i\ \operatorname{Res}[f(z),\infty] \tag{17}$$

$$=2\pi i\ \operatorname{Res}\left[\frac{1}{z^2}f\left(\frac{1}{z}\right),0\right] \tag{18}$$

$$=2\pi i\ \operatorname{Res}\left[\frac{1}{z(1+2z^4)^3(1+z^2)^2},0\right]=2\pi i \tag{19}$$

4 利用留数计算实定积分

4.1 大小圆弧引理与约当引理

引理 4.1 (大圆弧引理)**.** *若 $f(z)$ 在扇形区域 $0<\theta_1\le\arg(z-a)\le\theta_2<2\pi$，$r_0<|z-a|<+\infty$ 内连续，且 $\lim\limits_{z\to\infty}(z-a)f(z)=0$，则对圆弧 $C_R:z=a+Re^{i\theta}$，$\theta_1\le\theta\le\theta_2$，有*

$$\lim_{R\to+\infty}\int_{C_R}f(z)\,\mathrm{d}z=0 \tag{20}$$

引理 4.2 (约当引理)**.** 若 $m>0$，$f(z)$ 在上半平面（$\Im z\geq 0$）上连续，且 $\lim\limits_{z\to\infty} f(z)=0$，则

$$\lim_{R\to+\infty}\int_{\Gamma_R} f(z)e^{imz}\,\mathrm{d}z=0 \tag{21}$$

其中 Γ_R 为上半平面中以原点为圆心、R 为半径的大圆弧.

引理 4.3 (小圆弧引理)**.** 若 $f(z)$ 在去心邻域 $0<|z-z_0|<r_0$ 内连续，且 $\lim\limits_{z\to z_0}(z-z_0)f(z)=A$，则对小圆弧 $C_r: z=z_0+re^{i\theta}$，$\theta_1\leq\theta\leq\theta_2$，有

$$\lim_{r\to 0^+}\int_{C_r} f(z)\,\mathrm{d}z=iA(\theta_2-\theta_1) \tag{22}$$

其中方向为逆时针时取正号.

4.2 形如 $\displaystyle\int_0^{2\pi} R(\cos\theta,\sin\theta)\,\mathrm{d}\theta$ 的积分

定理 4.4. 设 $R(u,v)$ 为 u,v 的有理函数，且在单位圆 $|z|=1$ 上 $R\left(\frac{z+z^{-1}}{2},\frac{z-z^{-1}}{2i}\right)$ 无奇点，则

$$\int_0^{2\pi} R(\cos\theta,\sin\theta)\,\mathrm{d}\theta=\oint_{|z|=1} R\left(\frac{z+z^{-1}}{2},\frac{z-z^{-1}}{2i}\right)\frac{\mathrm{d}z}{iz} \tag{23}$$

证明. 令 $z=e^{i\theta}$，则 $\mathrm{d}z=iz\,\mathrm{d}\theta$，$\mathrm{d}\theta=\mathrm{d}z/(iz)$，且

$$\cos\theta=\frac{z+z^{-1}}{2},\qquad \sin\theta=\frac{z-z^{-1}}{2i} \tag{24}$$

代入即得. □

例 4.1. 求 $I=\displaystyle\int_0^{2\pi}\frac{\mathrm{d}\theta}{a+b\cos\theta}$，$a>|b|$.

令 $z=e^{i\theta}$，则

$$I=\oint_{|z|=1}\frac{\mathrm{d}z}{iz\left(a+b\frac{z+z^{-1}}{2}\right)}=\frac{2}{i}\oint_{|z|=1}\frac{\mathrm{d}z}{bz^2+2az+b} \tag{25}$$

分母的零点为

$$z=\frac{-a\pm\sqrt{a^2-b^2}}{b} \tag{26}$$

其中 $|z_1|<1$（取负号），$|z_2|>1$（取正号）. z_1 为一阶极点，留数为

$$\operatorname{Res}\left[\frac{1}{bz^2+2az+b},z_1\right]=\frac{1}{2bz_1+2a}=\frac{1}{2\sqrt{a^2-b^2}} \tag{27}$$

故

$$I=\frac{2}{i}\cdot 2\pi i\cdot\frac{1}{2\sqrt{a^2-b^2}}=\frac{2\pi}{\sqrt{a^2-b^2}} \tag{28}$$

4.3 上半平面围道

形如 $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} R(x)\,\mathrm{d}x$ 的积分

设

$$R(z)=\frac{P(z)}{Q(z)}=\frac{z^n+a_1z^{n-1}+\cdots+a_n}{z^m+b_1z^{m-1}+\cdots+b_m} \tag{29}$$

满足：

1. $Q(z)$ 比 $P(z)$ 至少高两次，即 $m-n\geq 2$；
2. $Q(z)$ 在实轴上无零点；

3. $R(z)$ 在上半平面 $\Im z > 0$ 内的极点为 z_k（$k = 1, 2, \cdots, n$）.

则

$$\int_{-\infty}^{+\infty} R(x)\,\mathrm{d}x = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} \mathrm{Res}[R(z), z_k] \tag{30}$$

证明. 取上半平面围道 $C_R : [-R, R] + \Gamma_R$（Γ_R 为上半平面大圆弧）. 在 C_R 内部，由留数定理：

$$\oint_{C_R} R(z)\,\mathrm{d}z = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} \mathrm{Res}[R(z), z_k] \tag{31}$$

由于 $m - n \geq 2$，$\lim\limits_{z\to\infty} zR(z) = 0$，由大圆弧引理，$\int_{\Gamma_R} R(z)\,\mathrm{d}z \to 0$. 令 $R \to +\infty$ 即得. □

例 4.2. 求 $I = \int_{-\infty}^{+\infty} \dfrac{\mathrm{d}x}{(x^2+1)(x^2+4)}$.

$R(z) = 1/[(z^2+1)(z^2+4)]$，在上半平面的极点为 $z = i$，$z = 2i$.

$$\mathrm{Res}[R(z), i] = \lim_{z\to i} \frac{z-i}{(z^2+1)(z^2+4)} = \lim_{z\to i} \frac{1}{(z+i)(z^2+4)} = \frac{1}{2i\cdot 3} = \frac{1}{6i} \tag{32}$$

$$\mathrm{Res}[R(z), 2i] = \lim_{z\to 2i} \frac{z-2i}{(z^2+1)(z^2+4)} = \lim_{z\to 2i} \frac{1}{(z^2+1)(z+2i)} = \frac{1}{(-3)\cdot 4i} = -\frac{1}{12i} \tag{33}$$

故

$$I = 2\pi i \left(\frac{1}{6i} - \frac{1}{12i}\right) = 2\pi i \cdot \frac{1}{12i} = \frac{\pi}{6} \tag{34}$$

形如 $\int_{-\infty}^{+\infty} R(x)e^{iax}\,\mathrm{d}x$（$a > 0$）的积分

设 $R(x) = P(x)/Q(x)$ 为真分式，在实轴上无奇点，则

$$\int_{-\infty}^{+\infty} R(x)e^{iax}\,\mathrm{d}x = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} \mathrm{Res}[R(z)e^{iaz}, z_k] \tag{35}$$

其中 z_k 为 $R(z)$ 在上半平面的奇点.

证明. 取上半平面围道 $C_R : [-R, R] + \Gamma_R$，令 $f(z) = R(z)e^{iaz}$. 由留数定理：

$$\oint_{C_R} f(z)\,\mathrm{d}z = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} \mathrm{Res}[f(z), z_k] \tag{36}$$

由约当引理，$\int_{\Gamma_R} f(z)\,\mathrm{d}z \to 0$. 令 $R \to +\infty$ 即得. □

例 4.3 (拉普拉斯积分)**.** 求 $I = \int_{-\infty}^{+\infty} \dfrac{\cos bx}{a^2+x^2}\,\mathrm{d}x$，$a > 0$，$b > 0$.

由 $\cos bx = \Re(e^{ibx})$，

$$I = \Re \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{ibx}}{a^2+x^2}\,\mathrm{d}x \tag{37}$$

令 $f(z) = e^{ibz}/(a^2+z^2)$，在上半平面有简单极点 $z = ai$：

$$\mathrm{Res}[f(z), ai] = \lim_{z\to ai} \frac{e^{ibz}}{z+ai} = \frac{e^{-ab}}{2ai} \tag{38}$$

故

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{ibx}}{a^2+x^2}\,\mathrm{d}x = 2\pi i \cdot \frac{e^{-ab}}{2ai} = \frac{\pi}{ae^{ab}} \tag{39}$$

取实部得 $I = \dfrac{\pi}{ae^{ab}}$.

狄利克雷积分

例 4.4 (狄利克雷积分)**.** 求 $D=\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x$（等价地，$\displaystyle\int_{0}^{+\infty}\frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x=\frac{\pi}{2}$）.

这里 $R(x)=1/x$ 在实轴上有奇点 $x=0$，需用小圆弧绕过. 令 $f(z)=e^{iz}/z$，取上半平面围道（实轴线段 $[-R,-r]\cup[r,R]$，上半大圆弧 Γ_R，以及绕 $z=0$ 的小半圆弧 Γ_r）. 由柯西积分定理，围道内无奇点：

$$\int_{-R}^{-r}\frac{e^{ix}}{x}\,\mathrm{d}x+\int_{\Gamma_r}\frac{e^{iz}}{z}\,\mathrm{d}z+\int_{r}^{R}\frac{e^{ix}}{x}\,\mathrm{d}x+\int_{\Gamma_R}\frac{e^{iz}}{z}\,\mathrm{d}z=0 \tag{40}$$

由大圆弧引理，$\displaystyle\int_{\Gamma_R}\to 0$；由小圆弧引理，$\displaystyle\int_{\Gamma_r}\to -\pi i$（顺时针方向取负）. 故

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{ix}}{x}\,\mathrm{d}x=\pi i \tag{41}$$

取虚部得 $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x=\pi$，由偶函数性质得 $\displaystyle\int_{0}^{+\infty}\frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x=\frac{\pi}{2}$.

4.4 锁孔围道

对于含支点或对数奇点的积分，如 $\displaystyle\int_{0}^{+\infty}\frac{x^{\alpha-1}}{1+x}\,\mathrm{d}x$，取锁孔围道.

例 4.5 (欧拉积分)**.** 求 $I=\displaystyle\int_{0}^{+\infty}\frac{x^{\alpha-1}}{1+x}\,\mathrm{d}x$，$0<\alpha<1$.

令 $f(z)=z^{\alpha-1}/(1+z)$，取锁孔围道（以大圆弧 C_R、小圆弧 C_r 及割线上下岸连接）. 由留数定理，围道内有简单极点 $z=-1=e^{i\pi}$：

$$\mathrm{Res}[f(z),-1]=\lim_{z\to -1}(z+1)\frac{z^{\alpha-1}}{1+z}=e^{i\pi(\alpha-1)}=-e^{i\pi\alpha} \tag{42}$$

沿割线上岸（$\arg z=0$）积分为 I，沿割线下岸（$\arg z=2\pi$）积分为 $-e^{2\pi i(\alpha-1)}I=-e^{2\pi i\alpha}I$. 大圆弧和小圆弧积分均为 0，故

$$(1-e^{2\pi i\alpha})I=-2\pi i e^{i\pi\alpha} \tag{43}$$

解得

$$I=\frac{\pi}{\sin\pi\alpha} \tag{44}$$

4.5 矩形围道

对于形如 $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{\alpha x}}{1+e^{x}}\,\mathrm{d}x$ 的积分，可取矩形围道.

例 4.6. 求 $I=\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{\alpha x}}{1+e^{x}}\,\mathrm{d}x$，$0<\alpha<1$.

令 $f(z)=e^{\alpha z}/(1+e^{z})$，取矩形围道：四个顶点为 $-R$，R，$R+2\pi i$，$-R+2\pi i$.

$f(z)$ 在围道内的奇点为 $z=i\pi$（一阶极点），留数为

$$\mathrm{Res}[f(z),i\pi]=\lim_{z\to i\pi}\frac{e^{\alpha z}}{e^{z}}=-e^{i\pi\alpha} \tag{45}$$

沿底边（$y=0$，从 $-R$ 到 R）的积分为

$$\int_{-R}^{R}f(x)\,\mathrm{d}x \tag{46}$$

沿顶边（$y=2\pi$，从 R 到 $-R$）的积分：

$$\int_{R}^{-R}f(x+2\pi i)\,\mathrm{d}x=\int_{R}^{-R}\frac{e^{\alpha(x+2\pi i)}}{1+e^{x+2\pi i}}\,\mathrm{d}x=e^{2\pi i\alpha}\int_{R}^{-R}\frac{e^{\alpha x}}{1+e^{x}}\,\mathrm{d}x=-e^{2\pi i\alpha}\int_{-R}^{R}f(x)\,\mathrm{d}x \tag{47}$$

沿右边（$x=R$，从 0 到 2π）和左边（$x=-R$，从 2π 到 0）的积分趋于 0.

由留数定理：

$$(1-e^{2\pi i\alpha})\int_{-R}^{R} f(x)\,\mathrm{d}x = 2\pi i(-e^{i\pi\alpha}) \tag{48}$$

令 $R\to+\infty$：

$$I=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{\alpha x}}{1+e^{x}}\,\mathrm{d}x=\frac{-2\pi i e^{i\pi\alpha}}{1-e^{2\pi i\alpha}}=\frac{\pi}{\sin\pi\alpha} \tag{49}$$

例 4.7. 求 $I=\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{x^{a-1}}{1+x^{b}}\,\mathrm{d}x$，$0<a<b$.

令 $f(z)=z^{a-1}/(1+z^{b})$，取扇形围道：半径 R 和 r 的圆弧，以及夹角为 $2\pi/b$ 的两条半径. 围道内有简单极点 $z=e^{i\pi/b}$，留数为

$$\operatorname{Res}[f(z),e^{i\pi/b}]=\lim_{z\to e^{i\pi/b}}\frac{z^{a-1}}{bz^{b-1}}=\frac{1}{b}e^{i\pi(a-1)/b} \tag{50}$$

沿半径 $0\to R$ 的积分为 I；沿大圆弧积分趋于 0（因 $a<b$）；沿第二半径（$\arg z=2\pi/b$，从 $Re^{2\pi i/b}$ 到 0）的积分为

$$-e^{2\pi i a/b}I \tag{51}$$

由留数定理：

$$(1-e^{2\pi i a/b})I=2\pi i\cdot\frac{1}{b}e^{i\pi(a-1)/b} \tag{52}$$

解得

$$I=\frac{\pi}{b\sin(\pi a/b)} \tag{53}$$

5 对数留数与辐角原理

5.1 对数留数

定义 5.1 (对数留数)**.** 设 $f(z)$ 在区域 D 内除有限个极点和零点外解析，C 为 D 内不经过 $f(z)$ 的零点和极点的正向闭曲线，则称

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_C\frac{f'(z)}{f(z)}\,\mathrm{d}z \tag{54}$$

为 $f(z)$ 沿 C 的**对数留数**.

定理 5.1 (对数留数定理)**.** 设 $f(z)$ 在区域 D 内除有限个极点和零点外解析，C 为 D 内不经过 $f(z)$ 的零点和极点的正向闭曲线，则

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_C\frac{f'(z)}{f(z)}\,\mathrm{d}z=N-P \tag{55}$$

其中 N 为 $f(z)$ 在 C 内部的零点个数（按重数计），P 为 $f(z)$ 在 C 内部的极点个数（按阶数计）.

证明. 在 C 内部，$f(z)$ 的每个零点和极点对积分 $\oint_C f'(z)/f(z)\,\mathrm{d}z$ 的贡献均为 $2\pi i$（零点贡献 $+2\pi i$，极点贡献 $-2\pi i$），相加即得. □

5.2 辐角原理

定理 5.2 (辐角原理)**.** 设 $f(z)$ 在区域 D 内除有限个极点和零点外解析，C 为 D 内不经过 $f(z)$ 的零点和极点的正向闭曲线，则当 z 沿 C 顺时针绕行一周时，$\arg f(z)$ 的变化量为

$$\Delta_C \arg f(z) = 2\pi(N - P) \tag{56}$$

其中 N 和 P 分别为 C 内部零点和极点的个数（按重数或阶数计）.

5.3 儒歇定理

定理 5.3 (儒歇定理)**.** 设 $f(z)$ 和 $g(z)$ 在区域 D 内解析，C 为 D 内的正向闭曲线，且在 C 上有 $|f(z)| > |g(z)|$，则 $f(z)$ 与 $f(z) + g(z)$ 在 C 内部的零点个数相同（按重数计）.

证明. 在 C 上 $|f(z)| > |g(z)|$，故 $f(z) \neq 0$ 且 $f(z) + g(z) = f(z)[1 + g(z)/f(z)] \neq 0$. 令

$$F(z) = \frac{f(z) + g(z)}{f(z)} = 1 + \frac{g(z)}{f(z)} \tag{57}$$

在 C 上，$|g(z)/f(z)| < 1$，故 $F(z)$ 的像位于以 1 为圆心、半径为 1 的圆内，不包含原点. 因此 $\arg F(z)$ 沿 C 的变化量为 0. 由辐角原理，

$$N_{f+g} - N_f = \frac{1}{2\pi}\Delta_C \arg F(z) = 0 \tag{58}$$

故 $N_{f+g} = N_f$. □

例 5.1 (多项式零点分布)**.** 证明方程 $z^5 + 3z + 1 = 0$ 在圆盘 $|z| < 1$ 内有 1 个零点.

令 $f(z) = 3z$，$g(z) = z^5 + 1$. 在 $|z| = 1$ 上，

$$|f(z)| = 3, \qquad |g(z)| \leq |z|^5 + 1 = 2 \tag{59}$$

故 $|f(z)| > |g(z)|$. 由儒歇定理，$f(z) + g(z) = z^5 + 3z + 1$ 与 $f(z) = 3z$ 在 $|z| < 1$ 内有相同个数的零点. $f(z) = 3z$ 在 $|z| < 1$ 内有 1 个零点，故原方程在 $|z| < 1$ 内有 1 个零点.

例 5.2. 证明方程 $z^4 - 6z + 3 = 0$ 在 $1 < |z| < 2$ 内有 3 个零点.

在 $|z| = 1$ 上，令 $f(z) = -6z$，$g(z) = z^4 + 3$，则 $|f(z)| = 6$，$|g(z)| \leq 1 + 3 = 4$，故 $|f(z)| > |g(z)|$，$f + g$ 在 $|z| < 1$ 内有 1 个零点.

在 $|z| = 2$ 上，令 $f(z) = z^4$，$g(z) = -6z + 3$，则 $|f(z)| = 16$，$|g(z)| \leq 12 + 3 = 15$，故 $|f(z)| > |g(z)|$，$f + g$ 在 $|z| < 2$ 内有 4 个零点.

故在 $1 < |z| < 2$ 内有 $4 - 1 = 3$ 个零点.

6 伽马函数若干性质

6.1 伽马函数的积分表示

定义 6.1 (伽马函数)**.**

$$\Gamma(z) = \int_0^{+\infty} t^{z-1} e^{-t}\, \mathrm{d}t, \qquad \Re(z) > 0 \tag{60}$$

6.2 余元公式的证明

定理 6.1 (余元公式)**.** 对于 $0 < \Re(z) < 1$，有

$$\Gamma(z)\Gamma(1-z) = \frac{\pi}{\sin \pi z} \tag{61}$$

证明. 由欧拉积分结果 $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{x^{\alpha-1}}{1+x}\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{\sin \pi\alpha}$ $(0 < \alpha < 1)$，以及贝塔函数与伽马函数的关系

$$B(z, 1-z) = \frac{\Gamma(z)\Gamma(1-z)}{\Gamma(1)} = \Gamma(z)\Gamma(1-z) \tag{62}$$

另一方面，由贝塔函数的另一形式：

$$B(z, 1-z) = \int_0^{+\infty} \frac{s^{z-1}}{1+s}\,\mathrm{d}s \tag{63}$$

令 $z = \alpha$，$B(\alpha, 1-\alpha) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{s^{\alpha-1}}{1+s}\,\mathrm{d}s = \frac{\pi}{\sin \pi\alpha}$ 故

$$\Gamma(z)\Gamma(1-z) = \frac{\pi}{\sin \pi z} \tag{64}$$

□

伽马函数与贝塔函数关系的证明.

$$\Gamma(p)\Gamma(q) = 4\int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty} s^{2p-1}t^{2q-1}e^{-(s^2+t^2)}\,\mathrm{d}s\mathrm{d}t \tag{65}$$

$$= 2\int_0^{\pi/2} \cos^{2p-1}\theta \sin^{2q-1}\theta\,\mathrm{d}\theta \cdot 2\int_0^{+\infty} r^{2p+2q-1}e^{-r^2}\,\mathrm{d}r \tag{66}$$

$$= B(p, q)\Gamma(p+q) \tag{67}$$

□

6.3 $\Gamma(1/2)$ 的求值

由余元公式：

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\pi}{\sin(\pi/2)} = \pi \tag{68}$$

由于 $\Gamma(1/2) > 0$，故

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi} \tag{69}$$