# 复数域与解析函数

呜哩天才琪露诺

泌阳县第一高级中学

日期：2022 年 1 月 24 日

## 目录

1 数域的扩充 1

2 复变函数 2

3 复变函数的导数 2

4 解析函数 2

5 柯西-黎曼方程 3

6 调和函数与解析函数构造 4

7 指数函数 5

8 幂函数与多值函数 6

9 对数函数 7

10 其它初等函数 7

## 1 数域的扩充

**定义 1.1** (复数)**.** 复数是形如 $z = x + iy$ 的数，其中 $x = \Re(z)$ 称为 $z$ 的**实部**，$y = \Im(z)$ 称为 $z$ 的**虚部**.

**定义 1.2** (复数的三角形式)**.** 复数有三角形式 $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$，其中 $r > 0$ 称作 $z$ 的**模**，记作 $|z|$；$\theta$ 称作 $z$ 的**辐角**，记作 $\operatorname{Arg} z$. 由三角函数的周期性可知若 $\theta$ 是 $z$ 的辐角，则 $\theta + 2k\pi (k \in \mathbb{Z})$ 也是 $z$ 的辐角. 辐角中位于 $(-\pi, \pi]$ 的叫做**辐角主值**，记作 $\arg z$.

**定义 1.3** (共轭复数)**.** 对 $z = x + yi$，$z$ 的**共轭复数**定义为 $\overline{z} := x - yi$.

若 $z_1 = x_1 + iy_1$，$z_2 = x_2 + iy_2$，则复数的加法与乘法满足：

$$z_1 + z_2 = (x_1 + x_2) + (y_1 + y_2)i \tag{1}$$

$$z_1 \cdot z_2 = (x_1x_2 - y_1y_2) + (x_1y_2 + x_2y_1)i \tag{2}$$

复数相乘可以看作是模相乘，辐角相加.

## 2 复变函数

**定义 2.1** (复变函数)**.** 复变函数是映射 $f:\mathbb{C}\to\mathbb{C}$，$z=x+iy\mapsto w=u+iv$.

需要注意的是，复变函数**允许多值函数的存在**. 例如 $w=\operatorname{Arg}z$，对一个 $z_0\in\mathbb{C}$，对应无数个函数值，即 $\omega(z_0)=\arg z_0+2k\pi(k\in\mathbb{Z})$.

可以把 $u,v$ 看作关于 $x,y$ 的二元函数，即：

$$u=u(x,y),\qquad v=v(x,y) \tag{3}$$

例如 $w=z^2$，设 $z=x+iy$，$w=u+iv$，则

$$u+iv=(x+iy)^2=(x^2-y^2)+2xyi \tag{4}$$

所以 $u=x^2-y^2$，$v=2xy$.

## 3 复变函数的导数

**定义 3.1** (复变函数的导数)**.** $f(z)$ 在 $z_0\in D$ 处可导定义为，若如下极限存在：

$$f'(z_0):=\lim_{\Delta z\to0}\frac{f(z_0+\Delta z)-f(z_0)}{\Delta z} \tag{5}$$

则称 $f(z)$ 在 $z_0$ 处可导.

**例 3.1** (幂函数的导数)**.** 计算 $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}z^2$：

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}z^2=\lim_{\Delta z\to0}\frac{(z+\Delta z)^2-z^2}{\Delta z}=2z \tag{6}$$

**例 3.2** (共轭函数的不可导性)**.** 讨论 $f(z)=\bar{z}$ 的可导性.

计算差商：

$$\frac{\Delta w}{\Delta z}=\frac{\overline{z+\Delta z}-\bar{z}}{\Delta z}=\frac{\overline{\Delta z}}{\Delta z} \tag{7}$$

固定 $y$，$\Delta x\to0$ 时，

$$\lim_{\Delta z\to0}\frac{\overline{\Delta z}}{\Delta z}=\lim_{\Delta x\to0}\frac{\Delta x}{\Delta x}=1 \tag{8}$$

固定 $x$，$\Delta y\to0$ 时，

$$\lim_{\Delta z\to0}\frac{\overline{\Delta z}}{\Delta z}=\lim_{\Delta y\to0}\frac{-i\Delta y}{i\Delta y}=-1 \tag{9}$$

故 $\lim\limits_{\Delta z\to0}\dfrac{\overline{\Delta z}}{\Delta z}$ 不存在，即 $f'(z)$ 不存在.

## 4 解析函数

**定义 4.1** (解析函数与奇点)**.** 若 $f(z)$ 在 $z_0$ 及它的某个邻域内处处可导，则称 $f(z)$ 在 $z=z_0$ 处**解析**. 若 $f(z)$ 在 $z_0$ 处不解析，则称 $z_0$ 为 $f(z)$ 的**奇点**.

**评论** (可导与解析的关系)**.** $f(z)$ 在某闭区域上可导不能推出 $f(z)$ 在某闭区域上解析；$f(z)$ 在某区域上可导当且仅当 $f(z)$ 在某区域上解析.

**例 4.1** ($|z|^2$ 的解析性)**.** 讨论 $f(z)=|z|^2$ 的解析性.

取 $z_0\in\mathbb{C}$，计算

$$\lim_{\Delta z\to 0}\frac{|z_0+\Delta z|^2-|z_0|^2}{\Delta z}=\lim_{\Delta z\to 0}\frac{(z_0+\Delta z)(\overline{z_0}+\overline{\Delta z})-z_0\overline{z_0}}{\Delta z} \tag{10}$$

$$=\lim_{\Delta z\to 0}\left(\overline{z_0}+\overline{\Delta z}+z_0\frac{\overline{\Delta z}}{\Delta z}\right) \tag{11}$$

当 $z_0=0$ 时

$$\lim_{\Delta z\to 0}\frac{|z_0+\Delta z|^2-|z_0|^2}{\Delta z}=\lim_{\Delta z\to 0}\overline{\Delta z}=0 \tag{12}$$

当 $z_0\neq 0$ 时，设 $z$ 沿 $y-y_0=k(x-x_0)$ 逼近 $z_0$. 此时

$$\frac{\overline{\Delta z}}{\Delta z}=\frac{\Delta x-i\Delta y}{\Delta x+i\Delta y}=\frac{1-ki}{1+ki} \tag{13}$$

于是

$$\lim_{\Delta z\to 0}\frac{|z_0+\Delta z|^2-|z_0|^2}{\Delta z}=\overline{z_0}+z_0\frac{1-ki}{1+ki} \tag{14}$$

随 $k$ 的变化而变化，故 $f'(z_0)$ 不存在. 因此 $f(z)$ 只在 $z_0=0$ 处可导，在 $\mathbb{C}$ 上处处不解析.

# 5 柯西-黎曼方程

柯西-黎曼方程（C-R 方程）是复变函数论中最基本的方程之一，它给出了复函数可导（解析）的充要条件.

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y},\qquad \frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x} \tag{15}$$

C-R 方程与函数可导性、解析性的关系如下.

**定理 5.1** (可导与解析的充要条件)**.** *函数 $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$ 在区域 $D$ 内解析的充要条件是：$u(x,y)$ 与 $v(x,y)$ 在 $D$ 内处处可微，且满足柯西-黎曼方程.*

*特别地，$f(z)$ 在点 $z_0=x_0+iy_0$ 处可导的充要条件是：$u,v$ 在 $(x_0,y_0)$ 处可微且满足 C-R 方程.*

**评论.** 若 C-R 方程成立，则 $f(z)$ 的导数可以表示为以下四种等价形式：

$$f'(z)=\frac{\partial u}{\partial x}+i\frac{\partial v}{\partial x}=\frac{\partial u}{\partial x}-i\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{\partial v}{\partial y}+i\frac{\partial v}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y}-i\frac{\partial u}{\partial y} \tag{16}$$

**例 5.1** (指数函数)**.** 讨论函数 $f(z)=e^x(\cos y+i\sin y)$ 的可导性.

因为 $u=e^x\cos y$，$v=e^x\sin y$ 在 $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ 上处处可微，且

$$\frac{\partial u}{\partial x}=e^x\cos y,\quad \frac{\partial u}{\partial y}=-e^x\sin y,\quad \frac{\partial v}{\partial x}=e^x\sin y,\quad \frac{\partial v}{\partial y}=e^x\cos y \tag{17}$$

显然满足 C-R 方程，故 $f(z)$ 处处可导，且

$$f'(z)=e^x\cos y+ie^x\sin y \tag{18}$$

**例 5.2** (非解析函数)**.** 讨论函数 $f(z) = z\,\Re(z)$ 的可导性.

由于 $u = x^2$，$v = xy$ 在 $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ 上可微，且

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 2x\,,\quad \frac{\partial u}{\partial y} = 0\,,\quad \frac{\partial v}{\partial x} = y\,,\quad \frac{\partial v}{\partial y} = x \tag{19}$$

C-R 方程要求 $2x = x$ 且 $0 = -y$，因此仅在 $(0,0)$ 即 $z = 0$ 处满足条件.

所以该函数仅在 $z = 0$ 处可导，在 $\mathbb{C}$ 上处处不解析.

# 6 调和函数与解析函数构造

**定义 6.1** (调和函数)**.** 若二元实函数 $\varphi(x,y)$ 在区域 $D \subseteq \mathbb{R}\times\mathbb{R}$ 内具有二阶连续偏导数，且满足拉普拉斯方程:

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} = 0 \tag{20}$$

则称 $\varphi(x,y)$ 为区域 $D$ 内的**调和函数**.

**定义 6.2** (共轭调和函数)**.** 若 $\varphi(x,y)$ 和 $\phi(x,y)$ 均为 $D$ 内的调和函数，且满足 C-R 方程:

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x} = \frac{\partial\phi}{\partial y}\,,\qquad \frac{\partial\varphi}{\partial y} = -\frac{\partial\phi}{\partial x} \tag{21}$$

则称 $\varphi$ 是 $\phi$ 的**共轭调和函数**.

**评论.** 共轭调和函数的定义不具有对称性. 即若 $\varphi$ 是 $\phi$ 的共轭调和函数，则 $\phi$ 不一定是 $\varphi$ 的共轭调和函数.

**定理 6.1** (解析函数与调和函数)**.** *如果 $f(z) = u + iv$ 在区域 $D$ 内解析，则 $u$ 和 $v$ 在 $D$ 内都是调和函数，且 $u$ 是 $v$ 的共轭调和函数.*

**例 6.1** (由调和函数构造解析函数)**.** 证明 $u = x^2 + 2xy - y^2$ 为调和函数，并求以 $u$ 为实部的解析函数 $f(z)$.

**第一步：验证 $u$ 为调和函数.**

计算偏导数:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 2x + 2y\,,\quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 2\,,\quad \frac{\partial u}{\partial y} = 2x - 2y\,,\quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -2 \tag{22}$$

因此

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 2 - 2 = 0 \tag{23}$$

所以 $u$ 为调和函数.

**第二步：求共轭调和函数 $v$.**

设 $v$ 是 $u$ 的共轭调和函数，则由 C-R 方程得

$$\frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial x} = 2x + 2y\,,\qquad \frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y} = 2y - 2x \tag{24}$$

对第一式关于 $y$ 积分:

$$v = \int (2x + 2y)\,\mathrm{d}y = 2xy + y^2 + g(x) \tag{25}$$

再对 $x$ 求导并与第二式比较：

$$2y + g'(x) = 2y - 2x \quad \Rightarrow \quad g'(x) = -2x \tag{26}$$

积分得

$$g(x) = -x^2 + C \tag{27}$$

故

$$v = 2xy + y^2 - x^2 + C \tag{28}$$

**第三步：构造解析函数.**
因此所求解析函数为

$$f(z) = (x^2 + 2xy - y^2) + i(2xy + y^2 - x^2 + C) \tag{29}$$

其中 $C$ 为任意实常数.

**评论.** 由上述例子可以看出，给定一个调和函数作为实部（或虚部），可以通过 C-R 方程唯一确定其共轭调和函数（至多相差一个常数），从而构造出相应的解析函数.

# 7 指数函数

**定义 7.1** (指数函数)**.** 指数函数定义为

$$e^z = \exp z := e^x(\cos y + i \sin y) \tag{30}$$

其中 $z = x + iy$.

容易发现：

$$|e^z| = \sqrt{e^{2x}\cos^2 y + e^{2x}\sin^2 y} = \sqrt{e^{2x}} = e^x \tag{31}$$

$$\operatorname{Arg} e^z = y + 2k\pi, \qquad k \in \mathbb{Z} \tag{32}$$

于是复数的三角形式也能写作：

$$\rho e^{i\theta} = \rho(\cos\theta + i\sin\theta) \tag{33}$$

指数函数有如下性质：

1. 指数函数是单值函数.
2. 对任意 $z \in \mathbb{C}$，有 $e^z \neq 0$.
3. $e^{z_1+z_2} = e^{z_1} \cdot e^{z_2}$.
4. 周期性：$e^{z+2k\pi i} = e^z$.
5. 在复平面上处处解析，且 $(e^z)' = e^z$.
6. $e^z$ 在 $\infty$ 处无定义，自然也不解析.

# 8 幂函数与多值函数

幂函数 $z^n$（$n \in \mathbb{Z}$）的定义和实数域上一致. 当 $n = 1, 2, \ldots$ 时，$z^n$ 在 $\mathbb{C}$ 上处处解析但在 $\infty$ 处不解析；当 $n = 0$ 时，$z^n$ 在 $\overline{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ 上解析；当 $n = -1, -2, \ldots$ 时，$z^n$ 在 $\overline{\mathbb{C}} - \{0\}$ 上处处解析. 在 $z^n$ 的解析区域内，$(z^n)' = nz^{n-1}$.

由幂级数可定义多项式函数

$$P_n(z) = a_0 + a_1 z + \cdots + a_n z^n \tag{34}$$

和有理函数

$$R(z) = \frac{P_m(z)}{Q_n(z)}, \qquad Q_n(z) \neq 0 \tag{35}$$

## 根式函数与分支点

以根式函数 $\sqrt{z-a}$ 为例，$\omega = \sqrt{z-a}$ 定义为 $\omega^2 = z - a$. 设 $\omega = \rho e^{i\phi}$，$z - a = re^{i\theta}$，则

$$\rho = \sqrt{r}, \qquad \phi = \frac{\theta}{2} + n\pi = \frac{1}{2}\mathrm{Arg}(z-a) \tag{36}$$

$\omega$ 的多值性来源于 $z - a$ 的辐角的多值性，称 $z - a$ 为宗量. 于是

$$|\omega| = \sqrt{|z-a|}, \qquad \mathrm{Arg}\,\omega = \frac{1}{2}\mathrm{Arg}(z-a) \tag{37}$$

$z$ 从复平面上一闭合曲线上的 $z_0$ 出发，绕行一周后回到 $z_0$. 若 $a$ 在曲线外部，则 $\mathrm{Arg}(z-a)$ 不变，$\omega$ 不变；若 $a$ 在曲线内部，则 $\mathrm{Arg}(z-a)$ 变化 $2\pi$，$\mathrm{Arg}\,\omega$ 变化 $\pi$，$\omega$ 不还原.

**定义 8.1** (分支点)**.** 若 $\omega$ 在 $z_0$ 的去心邻域内有定义，且沿以 $z_0$ 为中心的任意充分小的闭合曲线一周回到原处时 $\omega$ 的值都不还原，则称 $z_0$ 为 $\omega$ 的**分支点**.

要考察 $\infty$ 是否为 $\omega$ 的分支点，可作足够大的简单闭合路径，绕行一周观察 $\omega$ 是否还原；也可作变换 $z = 1/t$，考察 $t = 0$ 是否是 $f(1/t)$ 的支点.

## 单值化方法

要对 $\omega$ 进行单值化，最简单的方法是将 $\omega$ 的宗量的辐角限制在某个 $2\pi$ 周期内. 宗量辐角变化的各个周期给出多值函数的各个单值分支，每个单值分支都是单值函数，整个多值函数就是各个单值分支的总和. 例如，对多值函数 $\omega = \sqrt{z-a}$，限制 $0 \leq \mathrm{Arg}(z-a) < 2\pi$ 和 $2\pi \leq \mathrm{Arg}(z-a) < 4\pi$ 分别给出 $\omega$ 的两个单值分支.

将多值函数划分为若干个单值分支，实质上是限制 $z$ 在复平面内的变化方式. 例如在上面的例子中，就是限制 $z$ 不得单独绕 $a$ 点或 $\infty$ 点转圈. 用平行于实轴的**割线**连接 $a$ 和 $\infty$，使 $z$ 的路径不得穿越割线，则 $z$ 不能绕单独一个分支点一周. 分别规定在割线上岸 $\mathrm{Arg}(z-a) = 0$ 和 $\mathrm{Arg}(z-a) = 2\pi$，即可得到 $\omega$ 的两个单值分支.

另一种确定 $z$ 与 $\omega$ 对应关系的方法是规定 $\omega$ 在分支点以外的某一点 $z_0$ 的值，并明确说明由 $z_0$ 出发到达 $z$ 点的路径.

**评论.** 涉及多值函数的运算时，需要特别留意有关宗量辐角的规定，例如

$$\sqrt{(z-a)(z-b)} = \sqrt{z-a} \cdot \sqrt{z-b} \tag{38}$$

这样的式子不一定成立.

# 9 对数函数

**定义 9.1** (对数函数)**.** 对数函数是指数函数的反函数：

$$w = \operatorname{Ln} z \iff z = e^w \tag{39}$$

对数函数有如下性质：

1. 对数函数是多值函数. $\operatorname{Ln} z$ 的多值性来源于其宗量 $z$ 的辐角多值性. $\operatorname{Ln} z$ 的分支点是 0 和 $\infty$. 作割线连接 0 与 $\infty$，并规定割线一侧的 $\operatorname{Arg} z$ 值，即可得到 $\operatorname{Ln} z$ 的单值分支：

$$\operatorname{Ln} z = \ln|z| + i(\arg z + 2k\pi), \qquad k \in \mathbb{Z} \tag{40}$$

把 $\operatorname{Ln} z$ 中 $-\pi < \Im(\operatorname{Ln} z) \le \pi$ 的值叫做 $\operatorname{Ln} z$ 的**主枝**，记作 $\ln z$.

**例 9.1.**

$$\operatorname{Ln}(-1) = 0 + (\pi + 2k\pi)i \tag{41}$$

**例 9.2.**

$$\operatorname{Ln}(-i) = 0 + \left(-\frac{\pi}{2} + 2k\pi\right)i \tag{42}$$

**例 9.3.**

$$\operatorname{Ln}(1+i) = \sqrt{2} + \left(\frac{\pi}{4} + 2k\pi\right)i \tag{43}$$

2. $\operatorname{Ln}(z_1 z_2) = \operatorname{Ln} z_1 + \operatorname{Ln} z_2$，$\operatorname{Ln}\dfrac{z_1}{z_2} = \operatorname{Ln} z_1 - \operatorname{Ln} z_2$.
3. $\operatorname{Ln} e^z = \ln|e^z| + i(\arg e^z + 2k\pi) = \ln e^{\Re(z)} + i[\Im(z) + 2k\pi] = z + 2k\pi i$.
4. 解析性（就主枝 $\ln z$ 讨论）：

$$\frac{\mathrm{d}\ln z}{\mathrm{d}z} = \frac{1}{z} \tag{44}$$

# 10 其它初等函数

**定义 10.1** (一般幂函数)**.** 对任意的 $\alpha$，幂函数定义为

$$z^\alpha = e^{\alpha \operatorname{Ln} z} \tag{45}$$

1. 当 $\alpha$ 为正整数 $n$ 时，

$$w = e^{n\operatorname{Ln} z} = e^{n[\ln|z| + i(\arg z + 2k\pi)]} = e^{n(\ln|z| + i\arg z)} \tag{46}$$

为单值函数.

2. 当 $\alpha = p/q$（$p, q \in \mathbb{Z}$ 且互质）时，为 $q$ 值函数.
3. 其它情况下，为无穷多值函数.

**定义 10.2** (三角函数)**.** 三角函数定义为

$$\sin z := \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}, \qquad \cos z := \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}, \qquad \tan z := \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{i(e^{iz} + e^{-iz})} \tag{47}$$

1. 解析性：

$$\sin' z = \cos z, \qquad \cos' z = -\sin z \tag{48}$$

2. 无界性：复三角函数在复平面上无界.

**定义 10.3** (双曲函数)**.** 双曲函数定义为

$$\sinh z := \frac{e^z - e^{-z}}{2}, \qquad \cosh z := \frac{e^z + e^{-z}}{2}, \qquad \tanh z := \frac{e^z - e^{-z}}{e^z + e^{-z}} \tag{49}$$

1. 与三角函数的关系：

$$\sinh z = -i \sin iz, \qquad \cosh z = \cos iz, \qquad \tanh z = -i \tan iz \tag{50}$$

2. 解析性：

$$\sinh' z = \cosh z, \qquad \cosh' z = \sinh z \tag{51}$$

$\tanh z$ 在 $\mathbb{C} - \left\{ \frac{k\pi}{2} i \right\}$ 上解析，且

$$\tanh' z = \frac{1}{\cosh^2 z} \tag{52}$$

3. 周期性：

$$\sinh(z + 2\pi i) = \sinh z, \qquad \cosh(z + 2\pi i) = \cosh z, \qquad \tanh(z + \pi i) = \tanh z \tag{53}$$

**例 10.1.**

$$\cos i = \frac{e^{-1} + e^1}{2} \tag{54}$$

**例 10.2.**

$$\sin(1 + 2i) = \frac{e^{(1+2i)i} - e^{-(1+2i)i}}{2i} \tag{55}$$

$$= \frac{e^{-2+i} - e^{2-i}}{2i} \tag{56}$$

$$= \frac{e^{-2}(\cos 1 + i \sin 1) - e^2(\cos 1 - i \sin 1)}{2i} \tag{57}$$

$$= \frac{\sin 1 (e^2 + e^{-2})}{2} + \frac{\cos 1 (e^2 - e^{-2})}{2} i \tag{58}$$