规范场论与 Chern-Simons 理论

呜哩天才琪露诺

日期：2026 年 10 月 23 日

1 Abel 规范场论

我们使用微分形式来表达规范势和场强。设 Abel 规范场论定义在流形 X 上，局部坐标为 $(x^1,\dots,x^d)$，且暂且忽略时间依赖。规范势 a_i 是一个协变矢量，在坐标变换 $x^i \mapsto x'^i$ 下，其分量变换律为

$$a'_i = \frac{\partial x^j}{\partial x'^i} a_j \tag{1}$$

这个坐标变换律非常自然，它意味着标量场 ϕ 的协变导数 $D_i\phi = \partial_i\phi - \mathrm{i}a_i\phi$ 的变换方式与普通导数 $\partial_i\phi$ 相同。因此，我们可以将规范势的分量组合成一个微分 1-形式

$$a = a_i \mathrm{d}x^i = a_1\mathrm{d}x^1 + a_2\mathrm{d}x^2 + \cdots + a_d\mathrm{d}x^d \tag{2}$$

则公式 (1) 等价于

$$a_i\mathrm{d}x^i = a'_i\mathrm{d}x'^i \tag{3}$$

这说明 1-形式 a 是坐标不变的几何对象。标量场 ϕ 的协变导数可以自然地写成 $\mathrm{d}\phi - \mathrm{i}a\phi$。

类似地，场强张量的分量可以组合成一个 2-形式 f

$$f = \mathrm{d}a = \sum_{i<j} (\partial_i a_j - \partial_j a_i)\mathrm{d}x^i \wedge \mathrm{d}x^j \tag{4}$$

这里 $f = \mathrm{d}a$ 恰好是 1-形式 a 的外微分，是一个坐标不变的对象。外微分算子 d 具有两个基本性质：

1. Leibniz 律：$\mathrm{d}(u \wedge v) = \mathrm{d}u \wedge v + (-1)^r u \wedge \mathrm{d}v$ （其中 u 为 r-形式）。
2. 幂零性：算子作用两次恒为零，即 $\mathbf{dd = 0}$。

由于 $f = \mathrm{d}a$，利用幂零性质直接得到 $\mathrm{d}f = \mathrm{d}(\mathrm{d}a) = 0$。这说明场强 f 是一个闭形式。

在规范变换下，规范势的形式变换为 $a \mapsto a + \mathrm{d}\alpha$，由此可以证明 f 是规范不变的：

$$\mathrm{d}(a + \mathrm{d}\alpha) = \mathrm{d}a + \mathrm{d}(\mathrm{d}\alpha) = \mathrm{d}a \tag{5}$$

2 非 Abel 规范场论

非 Abel 规范场的规范势不再是一个简单的实数值 1-形式，而是取值于李代数 $\mathrm{Lie}(G)$ 的 1-形式，其中 G 为理论的内部对称群。在 $\mathrm{SU}(2)$ 理论中，规范势 $A = A_i\mathrm{d}x^i$ 是一个 2×2 的无迹反厄米矩阵，其矩阵元是普通的 1-形式。具体矩阵形式为

$$A = \begin{pmatrix} \mathrm{i}A^3 & \mathrm{i}A^1 + A^2 \\ \mathrm{i}A^1 - A^2 & -\mathrm{i}A^3 \end{pmatrix} \tag{6}$$

等价地，它可以写成基底展开的形式

$$A = A^a(\mathrm{i}\sigma^a) \tag{7}$$

其中 A^1, A^2, A^3 是普通的实 1-形式，$\{\mathrm{i}\sigma^a\}$ 是 Pauli 矩阵。标量场 Φ 的协变导数定义为

$$D\Phi = \mathrm{d}\Phi + A\Phi$$

这里的标量场是指 $\Phi = \begin{pmatrix}\phi_1\\ \phi_2\end{pmatrix}$ 的两个分量在 Lorentz 变换下都按标量的变换法则变换。

场强 F 是一个取值于李代数的 2-形式，其定义为

$$F = \mathrm{d}A + A \wedge A \tag{8}$$

这里的 $A \wedge A$ 是矩阵 A 与自身相乘，矩阵元之间使用 1-形式的楔积 $\wedge$ 相乘。由于矩阵乘法不对易，一般情况下 $A \wedge A \neq 0$。将其用坐标基底展开：

$$\begin{aligned} F = \mathrm{d}A + A \wedge A &= \sum_{i,j} \left(\partial_i A_j + A_i A_j\right) \mathrm{d}x^i \wedge \mathrm{d}x^j \\ &= \sum_{i<j} \left(\partial_i A_j - \partial_j A_i + [A_i, A_j]\right) \mathrm{d}x^i \wedge \mathrm{d}x^j \\ &= \sum_{i<j} F_{ij} \mathrm{d}x^i \wedge \mathrm{d}x^j \end{aligned} \tag{9}$$

其中 $[A_i, A_j] = A_i A_j - A_j A_i$ 为李代数对易子。在 $\mathrm{su}(2)$ 的具体情形下，将矩阵 A 代入可得场强 F 的具体形式

$$F = \begin{pmatrix} \mathrm{i}\Delta A^3 & \mathrm{i}\Delta A^1 + \Delta A^2 \\ \mathrm{i}\Delta A^1 - \Delta A^2 & -\mathrm{i}\Delta A^3 \end{pmatrix} \tag{10}$$

其中 $\Delta A^1 = \mathrm{d}A^1 - 2A^2 \wedge A^3$（其他分量按循环对称给出）。

场强 F 不再是规范不变的。在规范变换 g 下，规范势和场强的变换规则为

$$A \mapsto gAg^{-1} - \mathrm{d}gg^{-1} \tag{11}$$

$$F \mapsto gFg^{-1} \tag{12}$$

A 的变换多出了一项 $-\mathrm{d}gg^{-1}$，这是仿射联络的特征；而 F 作为曲率，只做协变变换。

在非 Abel 理论中，F 不再是一个闭形式（即 $\mathrm{d}F \neq 0$），但它满足 Bianchi 恒等式

$$\mathrm{d}F + A \wedge F - F \wedge A = 0 \tag{13}$$

这可以简写为协变外微分 $DF = 0$，其证明如下。由于 $F = \mathrm{d}A + A \wedge A$，利用外微分的 Leibniz 律及 $\mathrm{dd} = 0$，可得

$$\begin{aligned} \mathrm{d}F &= \mathrm{d}A \wedge A - A \wedge \mathrm{d}A \\ &= (\mathrm{d}A + A \wedge A) \wedge A - A \wedge (\mathrm{d}A + A \wedge A) \end{aligned} \tag{14}$$

将 F 的定义代回，即证。

3 第一 Chern 形式与第一 Chern 数

Abel 规范场的第一 Chern 形式定义为如下的 2-形式

$$C_1 = \frac{1}{2\pi} f \tag{15}$$

首先考虑平面 $\mathbb{R}^2$ 上的规范场。第一 Chern 数 c_1 是第一 Chern 形式在 $\mathbb{R}^2$ 上的积分

$$c_1 = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}^2} f \tag{16}$$

若要使得 c_1 有限，需要满足场强 f 是光滑的，且当 $|x| \to \infty$ 时，f 的衰减速度比 $|x|^{-2}$ 更快。在笛卡尔坐标下，积分可写为

$$c_1 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f_{12} \, \mathrm{d}x^1 \mathrm{d}x^2 \tag{17}$$

其中 $f_{12} = \partial_1 a_2 - \partial_2 a_1$ 是平面上的磁场。因此，第一 Chern 数 c_1 即为穿过平面的总磁通量除以 2π。如果设想平面嵌入在 $\mathbb{R}^3$ 中，那么 $b = -f_{12}$ 是磁场指向 x^3 方向的分量。

利用微分形式的 Stokes 定理，c_1 可以表示为无穷远处边界 S^1_∞ 上的线积分

$$c_1 = \frac{1}{2\pi} \int_{S^1_\infty} a = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} a_\theta \, \mathrm{d}\theta \Big|_{\rho=\infty} \tag{18}$$

其中 (ρ, θ) 为极坐标。

因为当 $|x| \to \infty$ 时 $f \to 0$，所以在 $|x|$ 很大时，$a = \mathrm{d}\alpha$ 总是局部成立的。特别地，在无穷远的圆周上，有 $a_\theta = \frac{\partial \alpha}{\partial \theta}$。代入上式得到

$$c_1 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\partial \alpha}{\partial \theta} \, \mathrm{d}\theta = \frac{1}{2\pi} (\alpha(2\pi) - \alpha(0)) \tag{19}$$

但是我们未必能找到全局的单值标量函数 α，它在绕无穷远边界一圈后的增量未必是 0，也不必是 2π 的整数倍。

设 X 是一个无边界的紧致二维曲面。假设复标量场 ϕ 和实 1-形式 a 在 X 上都是全局单值定义的。此时，场强 $f = \mathrm{d}a$ 是一个全局的恰当形式。使用 Stokes 定理，我们有

$$\int_X f = \int_X \mathrm{d}a = \int_{\partial X} a = 0 \tag{20}$$

因为 ∂X 表示 X 的边界，而这里没有边界（$\partial X = \emptyset$）。因此，穿过 X 的总磁通量为零，这在物理上显得过于平庸。要获得非平庸的物理情况，我们需要放宽对场 $\{\phi, a\}$ 全局性的看法。它们只需要被看作定义在曲面 X 上的U(1) 丛上的截面和联络。物理上，ϕ 和 a 本身并非可观测量，只有它们的规范等价类才是可观测的。因此，只需要求 ϕ 和 a 在相差一个规范变换的意义下全局定义良好即可。

我们用有限个彼此重叠的可缩开集 $\{U_p\}$ 覆盖 X。假设在区域 U_1 上，截面和联络由标量场和 1-形式 $\{\phi^{(1)}, a^{(1)}\}$ 表示；在区域 U_2 上由 $\{\phi^{(2)}, a^{(2)}\}$ 表示。在它们的重叠区域 $U_{21} = U_2 \cap U_1$ 上，这两组局部场必须通过一个规范变换联系起来

$$\phi^{(2)} = e^{-\mathrm{i}\alpha^{(21)}} \phi^{(1)} \tag{21}$$

$$a^{(2)} = a^{(1)} - \mathrm{d}\alpha^{(21)} \tag{22}$$

其中过渡函数 $e^{-\mathrm{i}\alpha^{(21)}} \in \mathrm{U}(1)$ 仅需在重叠区域 U_{21} 上有定义。虽然我们可能在 U_1 和 U_2 上使用了不同的坐标系统，但公式 (21) 和 (22) 是坐标无关的，所以这不影响结论。

此外，我们仍然拥有在 U_1 和 U_2 上独立进行规范变换的自由度。这意味着这些区域上的场可以被替换为

$$\phi'^{(1)} = e^{\mathrm{i}\alpha^{(1)}} \phi^{(1)} \tag{23}$$

$$a'^{(1)} = a^{(1)} + \mathrm{d}\alpha^{(1)} \tag{24}$$

对于 $\{\phi^{(2)}, a^{(2)}\}$ 也可以做类似替换。场仍满足 (21) 和 (22)，但过渡函数 $e^{-\mathrm{i}\alpha^{(21)}}$ 需要换成

$$e^{+\mathrm{i}\alpha(2)} e^{-\mathrm{i}\alpha^{(21)}} e^{-\mathrm{i}\alpha(1)} \tag{25}$$

在三重交叠区域 $U_3 \cap U_2 \cap U_1$ 上，过渡函数的乘积还必须满足

$$e^{-\mathrm{i}\alpha^{(32)}} e^{-\mathrm{i}\alpha^{(21)}} e^{-\mathrm{i}\alpha^{(13)}} = 1 \tag{26}$$

此处约定 $e^{-\mathrm{i}\alpha^{(pq)}}$ 恒等于 $e^{\mathrm{i}\alpha^{(qp)}}$。

公式 (21) 意味着在 U_{21} 上，规范不变量的模方 $|\phi^{(1)}|^2$ 和 $|\phi^{(2)}|^2$ 是相等的，因此 $|\phi|^2$ 是全局定义的。更重要的是，场强 f 也是全局定义的，这是因为根据 (22) 有

$$f^{(1)} = \mathrm{d}a^{(1)} = \mathrm{d}a^{(2)} = f^{(2)} \tag{27}$$

由于局部上 $f = \mathrm{d}a$，f 是一个闭 2-形式，满足 $\mathrm{d}f = 0$。但是，因为 a 不是全局定义的，f 并不一定是全局恰当的 2-形式。这就意味着，它在 X 上的积分不一定为零。最简单的例子是 X 为球面 S^2。我们需要两个区域 U_1 和 U_2 来覆盖 S^2。假设 U_1 覆盖除南极以外的区域，U_2 覆盖除北极以外的区域。我们使用球坐标 (θ, φ)。令 $\{\phi^{(1)}, a^{(1)}\}$ 和 $\{\phi^{(2)}, a^{(2)}\}$ 分别为 U_1 和 U_2 上的场。在包含赤道的重叠区域 U_{21} 上，令 $e^{-\mathrm{i}\alpha^{(21)}}$ 为过渡函数，定义在 $\varphi \in [0, 2\pi)$ 以及 $\theta \in (0, \pi)$ 上。那么

$$a^{(2)} = a^{(1)} - \mathrm{d}\alpha^{(21)} \tag{28}$$

由于 $\phi^{(2)} = e^{-\mathrm{i}\alpha^{(21)}}\phi^{(1)}$，且 $\phi^{(1)}, \phi^{(2)}$ 在各自区域上都是良定义的，$e^{-\mathrm{i}\alpha^{(21)}}$ 必须是单值的，即

$$e^{-\mathrm{i}\alpha^{(21)}(2\pi)} = e^{-\mathrm{i}\alpha^{(21)}(0)} \tag{29}$$

现在让我们计算 f 在整个 S^2 上的积分。我们将 S^2 分成以赤道为边界的两个半球，分别取 $a^{(1)}$ 和 $a^{(2)}$

$$\begin{aligned} \int_{S^2} f &= \int_{\text{北半球}} \mathrm{d}a^{(1)} + \int_{\text{南半球}} \mathrm{d}a^{(2)} \\ &= \int_{\text{赤道}} a^{(1)} - \int_{\text{赤道}} a^{(2)} \end{aligned} \tag{30}$$

代入 (28) 式

$$\int_{S^2} f = \int_{\text{赤道}} \mathrm{d}\alpha^{(21)} = \alpha^{(21)}\left(\frac{\pi}{2}, 2\pi\right) - \alpha^{(21)}\left(\frac{\pi}{2}, 0\right) \tag{31}$$

即绕赤道一圈后，总磁通量等于 $\alpha^{(21)}$ 的增量。根据 (29) 的单值性条件，这个增量必然是 2π 的整数倍，记为 $2\pi N$，这就得到了

$$\int_{S^2} f = 2\pi N \tag{32}$$

或者等价地，第一 Chern 数为

$$c_1 = \frac{1}{2\pi}\int_{S^2} f = N \tag{33}$$

因此，第一 Chern 数必须是一个整数。这在物理上即为磁单极子的 Dirac 量子化条件。

对于任何没有边界的紧致黎曼面 X，无论其亏格 g 为多少，其第一 Chern 数都具有相同的形式

$$c_1 = \frac{1}{2\pi}\int_X f = N \tag{34}$$

其中 N 是任意整数。我们可以通过将曲面表示为带有边等同关系的多边形来理解这一点。规范势 a 可以被光滑地延拓到多边形的内部，但在边界处必须满足约束。多边形边界边 a_s 附近的规范势必须与相邻边 a_s^{-1} 附近通过规范变换 $e^{\mathrm{i}\sigma_s}$ 联系起来。这个规范变换在对应 a_s 的回路 X 上是单值的。根据 Stokes 定理，c_1 可以表示为 $\frac{1}{2\pi}\oint a$，这里的积分沿着多边形的边界。如果规范变换 $e^{\mathrm{i}\sigma_s}$ 是单位 1，那么方向相反的边 a_s 和 a_s^{-1} 的贡献相互抵消。总的贡献为 $\frac{1}{2\pi}\int a_s \mathrm{d}s$，其中积分是沿着 a_s 的，这等于整数 N_a。同样地，对另一对边 b_s 和 b_s^{-1} 也贡献整数 N_b。将它们相加，我们便得到定理 (34)。

由于非 Abel 场强 F 不是规范不变的（在规范变换下 $F \mapsto gFg^{-1}$），我们不能直接类比 Abel 理论来定义第一 Chern 形式 $C_1 = \frac{1}{2\pi}f$。然而，对于 $\mathrm{U}(n)$ 规范理论，我们可以定义

$$C_1 = \frac{\mathrm{i}}{2\pi}\mathrm{tr}F \tag{35}$$

其中 tr 表示求迹，因为 $\mathrm{tr}(gFg^{-1}) = \mathrm{tr}(g^{-1}gF) = \mathrm{tr}F$（迹的循环性 $\mathrm{tr}(\alpha\beta\cdots\gamma) = \mathrm{tr}(\beta\cdots\gamma\alpha)$ 在矩阵元是交换对象时有效，此处 g 和 g^{-1} 是 0-形式，F 是 2-形式，由 $A \wedge B = (-1)^{pq}B \wedge A$，它们的矩阵元是交换的），

故 C_1 是规范不变的。在李代数层面，$\mathrm{u}(n)=\mathrm{su}(n)\oplus\mathrm{U}(1)$，换言之，对任意 $A\in\mathrm{u}(n)$，都有

$$A=\left(A-\frac{\mathrm{tr}A}{n}I\right)+\frac{\mathrm{tr}A}{n}I \tag{36}$$

无迹部分属于 $\mathrm{su}(2)$（根据 $1=\det e^X\approx\det(1+X)\approx 1+\mathrm{tr}X$），求迹操作提取了 $\mathrm{U}(1)$ 部分的贡献。

4 第二 Chern 形式与第二 Chern 数

Abel 规范场的第二 Chern 形式定义为如下的 4-形式

$$C_2=\frac{1}{8\pi^2}f\wedge f \tag{37}$$

这个 4-形式是闭形式，因为 $\mathrm{d}f=0$，并且它是局部恰当的，因为

$$C_2=\frac{1}{8\pi^2}\mathrm{d}(f\wedge a) \tag{38}$$

在 $\mathbb{R}^4$ 上，Abel 场的第二 Chern 数为

$$c_2=\int_{\mathbb{R}^4}C_2=\frac{1}{8\pi^2}\int_{S^3_\infty}f\wedge a \tag{39}$$

如果场在 $|x|\to\infty$ 时衰减到 0，这个积分就会消失。因此在这个边界条件下，$\mathbb{R}^4$ 上的 Abel 场第二 Chern 数是平凡的。

然而，对于闭的 4 维流形 X，如果 X 中存在拓扑非平庸的闭 2 维子流形，那么 c_2 就可以是非零的，并且它始终是一个整数。例如，假设 $X=X^{(1)}\times X^{(2)}$，其中每个因子都是一个紧致曲面，那么

$$c_2=\frac{1}{8\pi^2}\int_{X^{(1)}\times X^{(2)}}f\wedge f=\left(\frac{1}{2\pi}\int_{X^{(1)}}f\right)\left(\frac{1}{2\pi}\int_{X^{(2)}}f\right)=c_1^{(1)}c_1^{(2)} \tag{40}$$

这里的 $c_1^{(1)}$ 和 $c_1^{(2)}$ 分别是场在 $X^{(1)}$ 和 $X^{(2)}$ 上的第一 Chern 数。因子 2 在这里消去了。因为如果 $f=f^{(1)}+f^{(2)}$，其中 $f^{(1)}$ 在 $X^{(1)}$ 上非零，$f^{(2)}$ 在 $X^{(2)}$ 上非零，那么 $f\wedge f=2f^{(1)}\wedge f^{(2)}$。

对非 Abel 场，第二 Chern 形式 C_2 定义为

$$C_2=\frac{1}{8\pi^2}\left[\mathrm{tr}(F\wedge F)-\mathrm{tr}F\wedge\mathrm{tr}F\right] \tag{41}$$

假设 F 没有 $\mathrm{U}(1)$ 部分，那么只有 $\mathrm{tr}(F\wedge F)$ 这一项有贡献。$F\wedge F$ 是矩阵 F 自身相乘，其中的 2-形式分量通过楔积结合。结果取迹后是一个 4-形式。由迹的循环性质

$$\mathrm{tr}(gFg^{-1}\wedge gFg^{-1})=\mathrm{tr}(gFg^{-1})=\mathrm{tr}(F\wedge F) \tag{42}$$

因此，C_2 是规范不变的。C_2 的一个关键性质是它是一个闭 4-形式，证明如下

$$\begin{aligned}\mathrm{d}C_2&=\frac{1}{4\pi^2}\mathrm{tr}(\mathrm{d}F\wedge F)\\&=\frac{1}{4\pi^2}\left[\mathrm{tr}(F\wedge A\wedge F)-\mathrm{tr}(A\wedge F\wedge F)\right]\\&=0\end{aligned} \tag{43}$$

这里使用了 Bianchi 恒等式 (13) 以及迹的循环性，并利用了 2-形式与任意 r-形式对易的事实。

在局部上，C_2 可以显式地写为一个恰当形式

$$C_2=\mathrm{d}\left[\frac{1}{8\pi^2}\mathrm{tr}\left(F\wedge A-\frac{1}{3}A\wedge A\wedge A\right)\right] \tag{44}$$

括号中的 3-形式即著名的 Chern-Simons 3-形式。

现在让我们专门研究定义在时空 $\mathbb{R}^4$ 上的 $\mathrm{SU}(2)$ 规范场，并定义第二 Chern 数

$$c_2=\int_{\mathbb{R}^4}C_2 \tag{45}$$

与 U(1) 规范理论在 $\mathbb{R}^2$ 中 c_1 的情况不同，如果场强 F 在 $|x| \to \infty$ 时衰减得足够快，c_2 就是一个整数。为了说明这一点，我们假设 F 具有这种快速衰减性，简写为 $F^\infty = 0$，并固定径向规范 $x^\mu A_\mu = 0$。那么

$$A^\infty = -\mathrm{d}g^\infty (g^\infty)^{-1} \tag{46}$$

g^∞ 定义在无穷远处的三维球面 S^3_∞ 上，并且取值于 SU(2)（设 $g^\infty = e^{-M}$，其中 $M \in \mathrm{su}(2)$ 是 0-形式，则 $A^\infty = \mathrm{d}M$）。因此，我们得到了一个映射

$$g^\infty : S^3_\infty \to \mathrm{SU}(2) \tag{47}$$

如果对 g^∞ 在 S^3_∞ 上的全局定义存疑，可以从定义在 S^3_∞ 北半球和南半球上的两个函数 g^∞_N 和 g^∞_S 出发，其中

$$A^\infty_N = -\mathrm{d}g^\infty_N (g^\infty_N)^{-1}, \quad A^\infty_S = -\mathrm{d}g^\infty_S (g^\infty_S)^{-1} \tag{48}$$

在它们重叠的赤道上，必须存在一个规范变换 g^∞_E 将它们连接起来

$$g^\infty_N = g^\infty_E g^\infty_S \tag{49}$$

g^∞_E 是一个从 S^2 映射到 SU(2) 的映射。由于 $\pi_2(S^3) = I$（第二同伦群是平庸的），这样的映射同伦于常数映射 $S^2 \mapsto 1$。因此，g^∞_E 可以被连续延拓为北半球上的映射。那么，$(g^\infty_E)^{-1}$ 可以被用来改变北半球的 g^∞_N，同时保持赤道上的值固定。这样一来，在赤道上 $g^\infty_N = g^\infty_S$，进而 $A^\infty_N = A^\infty_S$。于是 g^∞ 在 S^3_∞ 上连续且全局地定义，且 A^∞ 由公式 (46) 给出。

对 (44)，Stokes 定理表明

$$c_2 = \int_{\mathbb{R}^4} C_2 = \frac{1}{8\pi^2} \int_{S^3_\infty} \mathrm{tr}\left(F \wedge A - \frac{1}{3} A \wedge A \wedge A \right) \tag{50}$$

由于在边界上 $F^\infty = 0$，第一项消失，于是

$$c_2 = -\frac{1}{24\pi^2} \int_{S^3_\infty} \mathrm{tr}(A^\infty \wedge A^\infty \wedge A^\infty) \tag{51}$$

将 A^∞ 用 g^∞ 重新表达，得到

$$c_2 = \frac{1}{24\pi^2} \int_{S^3_\infty} \mathrm{tr}\left\{ [\mathrm{d}g^\infty (g^\infty)^{-1}] \wedge [\mathrm{d}g^\infty (g^\infty)^{-1}] \wedge [\mathrm{d}g^\infty (g^\infty)^{-1}] \right\} \tag{52}$$

第二 Chern 数 c_2 就是无穷远处的映射 g^∞ 的度，因此是一个整数，这个整数也被称为规范场的瞬子数。

非 Abel 规范场可以定义在一般的无边界的闭合 4-流形 X 上（例如 4-球面或 4-环面）。与曲面上 Abel 理论的情况一样，此时 A 是一个复向量丛上的联络。X 必须被坐标卡 $\{U_p\}$ 覆盖，且联络 A 在每个坐标卡上被分别定义为 Lie(G) 值的 1-形式 $A^{(p)}$。在任意两个坐标卡 U_p 和 U_q 的重叠部分，存在一个规范变换 $g^{(qp)} \in G$ 将 $A^{(q)}$ 和 $A^{(p)}$ 联系起来。Chern 形式 C_2 如前定义，但由于它是规范不变的，所以它是 X 上的一个全局 4-形式。由于（局部的）Bianchi 恒等式，C_2 是闭的。C_2 并不一定是恰当的，除非 A 在 X 上全局定义（这仅在丛是平凡丛时成立）。第二 Chern 数为

$$c_2 = \int_X C_2 \tag{53}$$

如果 C_2 是恰当的，那么 $c_2 = 0$，因为 X 没有边界。一般来说 c_2 非零，并且始终是一个整数。此外，它只依赖于过渡函数 $\{g^{(qp)}\}$，因此它是丛在 X 上的一个拓扑不变量。如果 X 的维数大于 4，我们可以在其任意 4 维闭合子流形上对 C_2 进行积分，得到的 c_2 依然是一个整数。

5 Chern-Simons 形式与时间演化

在局部，Chern 形式可以表示为恰当形式，它可以写作 Chern-Simons 形式的外微分。Abel 场的第一 Chern 形式在局部是 2-形式 $C_1 = \frac{1}{2\pi}\mathrm{d}a$，因此

$$Y_1 = \frac{1}{2\pi}a \tag{54}$$

就是 Chern-Simons 1-形式。对于更一般的规范群，Chern-Simons 1-形式为

$$Y_1 = \frac{\mathrm{i}}{2\pi}\mathrm{tr}A \tag{55}$$

由(44)，非 Abel 规范场的 Chern-Simons 3-形式为

$$Y_3 = \frac{1}{8\pi^2}\mathrm{tr}\left(F\wedge A - \frac{1}{3}A\wedge A\wedge A\right) \tag{56}$$

其 Abel 版本为

$$Y_3 = \frac{1}{8\pi^2}f\wedge a \tag{57}$$

这些 Chern-Simons 形式都不是规范不变的；然而，它们的积分往往是规范不变的。

考虑 $\mathbb{R}^4$ 中的 SU(2) 规范场位形。我们显式地将其区分为 $\mathbb{R}^3$ 空间变量 x 和时间 t。由于我们是在流形上积分微分形式，度规不起作用，因此时间可以是 Eculid 或 Minkowski 时间。设 $|x|\to\infty$ 时 $F\to 0$，不限制 F 在 $t\to\pm\infty$ 时的行为。取径向规范条件 $A_r = 0$，则 A^∞ 就是 S^2_∞ 上的 1-形式，从而存在 $g^\infty : S^2_\infty \to \mathrm{SU}(2)$ 使得 $A^\infty = -\mathrm{d}g^\infty(g^\infty)^{-1}$。要找到一个使 $A^\infty = 0$ 的 g^∞ 并不困难，我们需要将映射 $g^\infty : S^2_\infty \to \mathrm{SU}(2)$ 延拓到整个空间，得到一个映射 $g : \mathbb{R}^3 \to \mathrm{SU}(2)$。由于 $\pi_2(\mathrm{SU}(2)) = I$，$g^\infty$ 同伦于常数映射，我们只要假设 S^2_∞ 连续缩小到原点的过程中，各个球面上的映射 $g(r)$ 也连续形变到 I，就能得到 $\mathbb{R}^3$ 到 SU(2) 的映射。这个构造可以推广到任意时间区间。

现在考虑 $C_2 = \mathrm{d}Y_3$，以及它在 $[t_0,t_1]\times\mathbb{R}^3$ 上的积分。使用 Stokes 定理

$$\int_{[t_0,t_1]\times\mathbb{R}^3} C_2 = \int_{\mathbb{R}^3} Y_3\Big|_{t=t_1} - \int_{\mathbb{R}^3} Y_3\Big|_{t=t_0} \tag{58}$$

由于我们的规范选择使得不仅 $F = 0$，而且 A 的所有空间分量在空间无穷远处都消失，因此空间无穷远边界没有贡献。

令 Chern-Simons 数 y_3 为 Y_3 的积分

$$y_3 = \int_{\mathbb{R}^3} Y_3 = \frac{1}{8\pi^2}\int_{\mathbb{R}^3}\mathrm{tr}\left(F\wedge A - \frac{1}{3}A\wedge A\wedge A\right) \tag{59}$$

只有 A 和 F 的空间分量对积分有贡献。方程 (58) 表明，C_2 在空间体积和时间从 t_0 到 t_1 上的积分，等于 Chern-Simons 数的变化量

$$\int_{[t_0,t_1]\times\mathbb{R}^3} C_2 = y_3(t_1) - y_3(t_0) \tag{60}$$

接下来，我们研究 y_3 的规范不变性。我们可以再进行一次规范变换 $g(x)$，并要求 $|x|\to\infty$ 时 $g(x) = 1_2$，这种映射 $g : \mathbb{R}^3 \to \mathrm{SU}(2)$ 实际上等价于从 S^3 到 SU(2) 的映射，因为固定了在无穷远处的作用。经过代数展开，可得

$$\begin{aligned} Y_3 &= \frac{1}{8\pi^2}\mathrm{tr}\left(gFg^{-1}\wedge(gAg^{-1} - \mathrm{d}gg^{-1}) - \frac{1}{3}(gAg^{-1} - \mathrm{d}gg^{-1})^3\right) \\ &= Y_3 + \frac{1}{8\pi^2}\mathrm{d}T_2 + \frac{1}{24\pi^2}\mathrm{tr}(\mathrm{d}gg^{-1})^3 \end{aligned} \tag{61}$$

其中 $T_2 = \mathrm{tr}(\mathrm{d}gg^{-1}\wedge Ag^{-1})$，且上标 3 表示三重楔积的简写。$T_2$ 在空间无穷远处消失，因此 $\mathrm{d}T_2$ 在 $\mathbb{R}^3$ 上的积分为零。对 Y_3 在空间 $\mathbb{R}^3$ 上积分得到的 Chern-Simons 数 y_3，其变换律为

$$y_3 \to y_3 + \frac{1}{24\pi^2}\int_{\mathbb{R}^3}\mathrm{tr}(\mathrm{d}gg^{-1})^3 = y_3 + \deg g \tag{62}$$

由此可见，Chern-Simons 数 y_3 不是规范不变量，但一个规范变换只能使其改变一个整数。y_3 的分数部分 $\{y_3\} = y_3 - [y_3]$ 是规范不变的。y_3 在“小”规范变换（即度 $\deg g = 0$ 的变换）下是严格不变的。此外，进一步的规范变换 g 可能依赖于空间坐标 x 和时间 t。然而，$\deg g$ 是一个与时间无关的整数。因此，y_3 在两个时刻 t_0 和 t_1 之间的差异是完全规范不变的。

现在假设当 $t \to \pm\infty$ 时 $F \to 0$。我们选择一种规范，使得在空间无穷远处 $A = 0$。在 $t \to -\infty$ 时，规范势趋向于

$$A(-\infty) = -\mathrm{d}g^-(g^-)^{-1} \tag{63}$$

其中在空间无穷远处 $g^- = 1_2$。规范变换 $(g^-)^{-1}$ 可以使 A 在 $t = -\infty$ 时变为 0。这就是真空态，其 Chern-Simons 数为零。必须对所有的 t 施加相同的规范变换，以避免不连续性。在 $A(-\infty) = 0$ 的条件下，考虑当 $t \to +\infty$ 时的场，则

$$A(+\infty) = -\mathrm{d}g^+(g^+)^{-1} \tag{64}$$

由于边界条件要求 $g^+ = 1_2$ 在空间无穷远处成立，映射 $g^+ : \mathbb{R}^3 \to \mathrm{SU}(2)$ 实际上是 S^2_∞ 到 $\mathrm{SU}(2)$ 的映射，具有整数度 $\deg g^+$。因为规范变换 g^+ 将 0 变为 $A(+\infty)$，由(62)，$\deg g^+$ 是 $t \to +\infty$ 时 Chern-Simons 数 y_3 的值。由于在 $t = -\infty$ 时 $y_3 = 0$，我们有

$$c_2 = \lim_{t\to\infty} y_3(t) = \deg g^+ \tag{65}$$

6 低维规范场与 Chern-Simons 作用量

6.1 1+1 维圆柱时空

现在让我们转向低维的 Abel 规范场。考虑一个圆柱形时空。圆的周长可以是 $2\pi L$，但 L 的值在这里无关紧要。设 1-形式规范势为 $a = a_0\mathrm{d}t + a_x\mathrm{d}x$。场强是 $f = f_{0x}\mathrm{d}t \wedge \mathrm{d}x$，其中 $f_{0x} = \partial_0 a_x - \partial_x a_0$ 是圆上的电场。Chern-Simons 1-形式是 $Y_1 = \frac{1}{2\pi}a$。沿着这个圆积分，得到 Chern-Simons 数：

$$y_1 = \frac{1}{2\pi}\oint_{S^1} a = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} a_x\mathrm{d}x \tag{66}$$

允许的规范变换 $g(t,x) \in \mathrm{U}(1)$ 是在圆上周期性的那些变换。这种规范变换依赖于时间。我们将其写为：

$$g(t,x) = e^{\mathrm{i}\alpha(t,x)} \tag{67}$$

其中 α 在 x 方向是模 2π 周期的，即 x 变化 2π 时 α 变化 $2n\pi$。在这个规范变换下：

$$a_x \mapsto a_x + \partial_x\alpha \tag{68}$$

因此，Chern-Simons 数 y_1 的变换为：

$$\begin{aligned} y_1 &\mapsto y_1 + \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \partial_x\alpha\,\mathrm{d}x \\ &= y_1 + \frac{1}{2\pi}(\alpha(2\pi) - \alpha(0)) \\ &= y_1 + k \end{aligned} \tag{69}$$

其中 k 是 $g(t,x)$ 的缠绕数。由连续性可知，这个缠绕数是不依赖于时间的。

同样，y_1 的分数部分是规范不变的。y_1 随时间的变化为：

$$y_1(t_1) - y_1(t_0) = \frac{1}{2\pi}\int_{t_0}^{t_1}\int_0^{2\pi} \partial_0 a_x\mathrm{d}x\mathrm{d}t = \frac{1}{2\pi}\int_{t_0}^{t_1}\int_0^{2\pi} f_{0x}\mathrm{d}x\mathrm{d}t \tag{70}$$

前提是 a_0 是单值的，这样 $\partial_x a_0$ 的空间积分就会由于周期性而消失。因此：

$$y_1(t_1) - y_1(t_0) = \int_{[t_0,t_1]\times S^1} C_1 \tag{71}$$

这是规范不变的，并且是高维公式的类比。

如果空间是直线 $\mathbb{R}$，我们依然可以定义 Chern-Simons 数为：

$$y_1 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} a_x \mathrm{d}x \tag{72}$$

其分数部分在规范变换下保持不变，只要我们仅考虑在 $x \to \pm\infty$ 时趋于 1 的规范变换 $g(t,x)$。

6.2 2+1 维 Chern-Simons 作用量

Chern-Simons 作用量是以下积分的常数倍：

$$y_3 = \frac{1}{8\pi^2}\int_{t_0}^{t_1}\int_{\mathbb{R}^2} f \wedge a \tag{73}$$

这里我们同样假设在空间无穷远处 $f \to 0$，因此 a 趋近于纯规范。对于这种边界条件下光滑的 f，y_3 是收敛的。

规范变换 $g(t,x) \in U(1)$ 必须满足在 $t = t_0$ 和 $t = t_1$ 处处有 $g = 1$，因为变分原理要求我们在初始时刻 t_0 和最终时刻 t_1 固定场。此外，对固定的 t，空间无穷远 S^1_∞ 上，必须有 $g = 1$，否则 g 无法连续地延拓至 $\mathbb{R}^2$。设 $g(t,x) = e^{\mathrm{i}\alpha(t,x)}$，在整个时空边界 $[t_0,t_1]\times\mathbb{R}^2$ 上 $\alpha = 0$。在这个规范变换下：

$$\begin{aligned} y_3 &\mapsto y_3 + \frac{1}{8\pi^2}\int_{t_0}^{t_1}\int_{\mathbb{R}^2} f \wedge \mathrm{d}\alpha \\ &= y_3 + \frac{1}{8\pi^2}\int_{t_0}^{t_1}\int_{\mathbb{R}^2} \mathrm{d}(f\wedge\alpha) \\ &= y_3 + \frac{1}{8\pi^2}\int_{\text{boundary}} f\wedge\alpha \\ &= y_3 \end{aligned} \tag{74}$$

因此，Chern-Simons 作用量是规范不变的。我们可以确定 y_3 在规范场的一般变分下的变化，该变分在边界上消失。在 $a \mapsto a + \delta a$ 下，$f \mapsto f + \mathrm{d}(\delta a)$，所以：

$$\begin{aligned} \delta y_3 &= \frac{1}{8\pi^2}\int (\mathrm{d}(\delta a)\wedge a + f\wedge\delta a) \\ &= \frac{1}{8\pi^2}\int (\mathrm{d}(\delta a\wedge a) + 2f\wedge\delta a) \\ &= \frac{1}{4\pi^2}\int f\wedge\delta a \end{aligned} \tag{75}$$

其中积分域如前所述为 $[t_0,t_1]\times\mathbb{R}^2$。由于在规范变换下，$a$ 改变而 δa 不改变，因此该式是规范不变的。

为了使 δy_3 对所有 δa 都为零，必须满足：

$$f = 0 \tag{76}$$

这就是 $2+1$ 维中仅以 Chern-Simons 项作为作用量的 Abel 理论的场方程。它意味着磁场和电场都必须为零。