基本群

呜哩天才琪露诺

华中科技大学物理学院

日期：2026 年 8 月 4 日

目录

1 道路，同伦 **1**

2 基本群 **3**

2.1 基本群的构造 3

2.2 基本群与基点无关 5

2.3 基本群的同伦不变性 6

2.4 形变收缩与可缩空间 6

3 圆环的基本群 **8**

4 乘积空间的基本群 **9**

5 自由群与群的表现 **10**

6 多面体的基本群 **10**

6.1 边群 10

6.2 计算步骤 11

6.3 2-骨架引理 11

6.4 花束（Bouquet）的基本群 12

6.5 环面的基本群 12

6.6 射影平面 $\mathbb{R}P^2$ 的基本群 14

1 道路，同伦

基本群是拓扑学中用来区分不同拓扑空间的重要不变量. 其构造始于空间中最基本的几何对象，即道路.

定义 1.1. 设 X 为拓扑空间，$I=[0,1]$ 为单位闭区间. 若连续映射 $\alpha: I \to X$ 满足 $\alpha(0)=x_0$ 且 $\alpha(1)=x_1$，则称 α 为从起点 x_0 到终点 x_1 的一条**道路**.

道路的像是空间中的一条连续轨迹，但道路本身还包含了具体的参数化方式. 特别地，若起点与终点重合，则构成环路.

定义 1.2. 设 $x_0 \in X$. 若道路 $\alpha : I \to X$ 满足 $\alpha(0) = \alpha(1) = x_0$，则称 α 为以 x_0 为**基点**的**环路**.

常值道路是特殊且重要的道路.

定义 1.3. 对任意 $x \in X$，定义常值道路 $c_x : I \to X$ 为 $c_x(s) = x$. 显然，常值道路也是以 x 为基点的常值环路.

为了在几何对象上赋予代数结构，我们定义道路的乘积与逆运算.

定义 1.4. 设 $\alpha, \beta : I \to X$ 为道路，且满足 $\alpha(1) = \beta(0)$（即 α 的终点等于 β 的起点）. 定义乘积道路 $\alpha * \beta : I \to X$ 为

$$(\alpha * \beta)(s) = \begin{cases} \alpha(2s), & 0 \le s \le \frac{1}{2} \\ \beta(2s-1), & \frac{1}{2} \le s \le 1 \end{cases} \tag{1}$$

几何上，$\alpha * \beta$ 就是把 α 和 β 两条道路拼接起来. 是先以双倍速度走完 α，α 的终点同时也是 β 的起点，再以双倍速度走完 β.

定义 1.5. 设 $\alpha : I \to X$ 为从 x_0 到 x_1 的道路. 定义其逆道路 $\alpha^{-1} : I \to X$ 为

$$\alpha^{-1}(s) = \alpha(1-s), \quad s \in I \tag{2}$$

几何上，α^{-1} 是从 x_1 出发，沿原路反向走回 x_0. 由于环路是特殊的道路，上述乘积和逆运算自然适用于环路.

尽管定义了乘积和逆，但若直接将所有环路的集合视为群，会遇到根本性困难. 以 x_0 为基点的环路 α 与其逆 α^{-1} 的乘积 $\alpha * \alpha^{-1}$ 在几何上表现为：先沿某路径走一遍，再沿原路快速返回. 直观上它“看起来”像是常值环路 c_{x_0}，但严格来说，在映射层面上它们并不相等. 具体而言，$\alpha * \alpha^{-1}$ 的像虽与 α 的像重合，但其参数化过程不同：它在 $s \in [0, \frac{1}{2}]$ 时从 x_0 走到 x_1，在 $s \in [\frac{1}{2}, 1]$ 时从 x_1 走回 x_0. 这意味着它在 x_0 处没有停留，而常值环路 c_{x_0} 则始终停在 x_0. 因此有

$$\alpha * \alpha^{-1} \neq c_{x_0} \tag{3}$$

同理，道路乘积也不满足严格的结合律，即

$$(\alpha * \beta) * \gamma \neq \alpha * (\beta * \gamma) \tag{4}$$

因为参数化分段点的位置不同. 由此可见，为了得到群的代数结构，不能直接使用道路本身，而必须对道路进行等价类划分.

为解决上述问题，我们引入同伦的概念，将能够通过连续变形相互转化的道路视为等同.

定义 1.6. 设 $\alpha, \beta : I \to X$ 为两条以相同点 x_0 为基点的环路. 若存在连续映射 $F : I \times I \to X$，使得对任意 $s, t \in I$ 满足

$$F(s,0) = \alpha(s), \quad F(s,1) = \beta(s), \quad F(0,t) = x_0, \quad F(1,t) = x_0 \tag{5}$$

则称 α 与 β **同伦**，记作 $\alpha \sim \beta$. 其中 F 称为同伦映射.

直观上，同伦意味着可以在不切断路径且不将基点移开的情况下，将一条环路连续地形变成另一条环路. t 可以视为变形的时间参数，$t = 0$ 时环路为 $\alpha(s)$，$t = 1$ 时环路为 $\beta(s)$，且形变过程中的任意时刻基点都不变，即 $F(0,t) = F(1,t) = x_0$.

命题 1.1. 同伦是环路集上的等价关系. 每个等价类称为一个**同伦类**.

证明. 自反性： $\alpha \sim \alpha$，同伦取为 $F(s,t)=\alpha(s)$ 对任意 $t \in I$.

对称性：设 $\alpha \sim \beta$，同伦为 $F(s,t)$ 满足 $F(s,0)=\alpha(s)$，$F(s,1)=\beta(s)$. 则 $\beta \sim \alpha$，同伦取为 $F(s,1-t)$. 这实际上就是把

传递性：设 $\alpha \sim \beta$，$\beta \sim \gamma$. 若 $F(s,t)$ 为 α 与 β 间的同伦，$G(s,t)$ 为 β 与 γ 间的同伦，则 α 与 γ 间的同伦可取为

$$H(s,t)=\begin{cases} F(s,2t), & 0 \le t \le \frac{1}{2} \\ G(s,2t-1), & \frac{1}{2} \le t \le 1 \end{cases} \tag{6}$$

该映射在 $t=\frac{1}{2}$ 处满足 $F(s,1)=\beta(s)=G(s,0)$, 故连续. 这实际上就是 $0 \le t \le \frac{1}{2}$ 先从 α 变形为 β, $\frac{1}{2} \le t \le 1$ 再从 β 变形为 γ. □

2 基本群

2.1 基本群的构造

基于同伦等价，我们可以定义严格意义上的群结构.

定义 2.1. 设 X 为拓扑空间，$x_0 \in X$. 以 x_0 为基点的所有环路的同伦类所构成的集合，配备乘积运算

$$[\alpha] \cdot [\beta] = [\alpha * \beta] \tag{7}$$

构成一个群，称为 X 在基点 x_0 处的**基本群**，记为 $\pi_1(X,x_0)$.

引理 2.1. 同伦类的乘积与代表元选取无关. 即若 $\alpha \sim \alpha'$，$\beta \sim \beta'$，则

$$\alpha * \beta \sim \alpha' * \beta' \tag{8}$$

证明. 设 $F(s,t)$ 为 α 与 α' 间的同伦，$G(s,t)$ 为 β 与 β' 间的同伦. 定义

$$H(s,t)=\begin{cases} F(2s,t), & 0 \le s \le \frac{1}{2} \\ G(2s-1,t), & \frac{1}{2} \le s \le 1 \end{cases} \tag{9}$$

则 $H(s,0)=(\alpha*\beta)(s)$，$H(s,1)=(\alpha'*\beta')(s)$，且在 $s=\frac{1}{2}$ 处由 $\alpha(1)=\beta(0)$ 保证连续性. 因此 H 为所需同伦，故 $\alpha*\beta \sim \alpha'*\beta'$. □

因此，$[\alpha]*[\beta]$ 的定义不依赖于代表元.

定理 2.2. $\pi_1(X,x_0)$ 在乘法 $[\alpha]\cdot[\beta]=[\alpha*\beta]$ 下构成一个群.

证明. 需验证结合律、单位元和逆元.

结合律：对任意环路 α,β,γ，需证明

$$[(\alpha*\beta)*\gamma] = [\alpha*(\beta*\gamma)] \tag{10}$$

如图(1)(a)，构造同伦 $F: I\times I \to X$ 如下：

$$F(s,t)=\begin{cases} \alpha\left(\frac{4s}{1+t}\right), & 0 \le s \le \frac{1+t}{4} \\ \beta(4s-t-1), & \frac{1+t}{4} \le s \le \frac{2+t}{4} \\ \gamma\left(\frac{4s-t-2}{2-t}\right), & \frac{2+t}{4} \le s \le 1 \end{cases} \tag{11}$$

当 $t=0$ 时，$F(s,0)$ 给出 $(\alpha*\beta)*\gamma$（三段区间分别为 $[0,\frac{1}{4}],[\frac{1}{4},\frac{1}{2}],[\frac{1}{2},1]$，对应前 $\frac{1}{4}$ 先走 α，中间 $\frac{1}{4}$ 再走 β，最后 $\frac{1}{2}$ 走 γ）；当 $t=1$ 时，区间变为 $[0,\frac{1}{2}],[\frac{1}{2},\frac{3}{4}],[\frac{3}{4},1]$，对应 $\alpha*(\beta*\gamma)$. 故结合律成立.

单位元：常值环路 c_{x_0} 的同伦类为单位元. 需证明

$$[\alpha]*[c_{x_0}]=[\alpha],\quad [c_{x_0}]*[\alpha]=[\alpha] \tag{12}$$

如图(1)(b)，对于 $\alpha*c_{x_0}\sim\alpha$，构造同伦

$$F(s,t)=\begin{cases}\alpha\left(\frac{2s}{1+t}\right), & 0\le s\le\frac{t+1}{2}\\ x_0, & \frac{t+1}{2}\le s\le 1\end{cases} \tag{13}$$

当 $t=0$ 时，前段为 $\alpha(2s)$（$0\le s\le\frac{1}{2}$），后段为常值 x_0，即 $\alpha*c_{x_0}$；当 $t=1$ 时，前段为 $\alpha(s)$，后段区间为空（或长度为 0），即 α. 同理，对 $c_{x_0}*\alpha\sim\alpha$，同伦为

$$F(s,t)=\begin{cases}x_0, & 0\le s\le\frac{1-t}{2}\\ \alpha\left(\frac{2s-1+t}{1+t}\right), & \frac{1-t}{2}\le s\le 1\end{cases} \tag{14}$$

故 $[c_{x_0}]$ 为单位元.

逆元：对任意 $[\alpha]$，需证明

$$[\alpha]*[\alpha^{-1}]=[c_{x_0}] \tag{15}$$

其中 $\alpha^{-1}(s)=\alpha(1-s)$. 构造同伦 $F:I\times I\to X$：

$$F(s,t)=\begin{cases}\alpha(2s(1-t)), & 0\le s\le\frac{1}{2}\\ \alpha(2(1-s)(1-t)), & \frac{1}{2}\le s\le 1\end{cases} \tag{16}$$

当 $t=0$ 时，前段为 $\alpha(2s)$，后段为 $\alpha(2(1-s))=\alpha^{-1}(2s-1)$（因为 $\alpha^{-1}(u)=\alpha(1-u)$，令 $u=2s-1$，则 $1-u=2-2s=2(1-s)$），这正是 $\alpha*\alpha^{-1}$. 当 $t=1$ 时，$F(s,1)=\alpha(0)=x_0$ 为常值环路. 故 $[\alpha*\alpha^{-1}]=[c_{x_0}]$，即 $[\alpha]^{-1}=[\alpha^{-1}]$. □

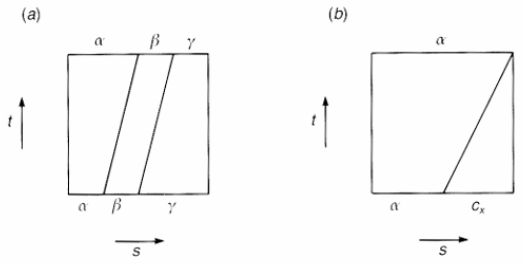


图 1: $(\alpha*\beta)*\gamma\sim\alpha*(\beta*\gamma)$ 以及 $\alpha*c_x\sim\alpha$

至此，$\pi_1(X,x_0)$ 被严格证明为一个群，其单位元为常值环路的同伦类，逆元为取逆环路的同伦类.

例 2.1 (圆盘与穿孔圆盘)**.** 考虑图 (2)中的两个空间.

- 对于无孔圆盘 Y（单连通空间），其上的任意环路均可连续收缩为一点. 因此所有环路彼此同伦，基本群是平凡群，即

$$\pi_1(Y)=\{0\} \tag{17}$$

- 对于带有一个孔洞的圆盘 X，环路的同伦类由整数 $n\in\mathbb{Z}$ 完全刻画. 其中 n 表示环路绕孔洞的净圈数：

逆时针环路绕为正，顺时针为负，不环路绕为零. 因此基本群为整数加法群

$$\pi_1(X) \cong \mathbb{Z} \tag{18}$$

群运算的几何意义为，$n+m$ 对应先绕孔洞 n 圈，再绕 m 圈.

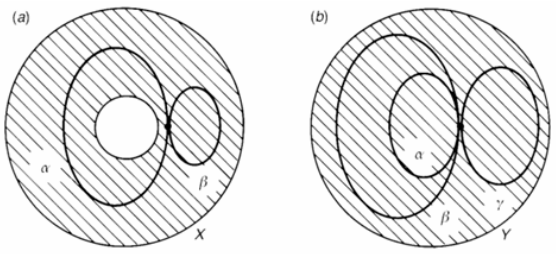


图 2: 带孔和不带孔的圆盘

2.2 基本群与基点无关

道路连通空间的基本群不依赖于基点的选择.

定理 2.3. *设 X 为道路连通拓扑空间，$x_0, x_1 \in X$. 则 $\pi_1(X, x_0)$ 与 $\pi_1(X, x_1)$ 同构.*

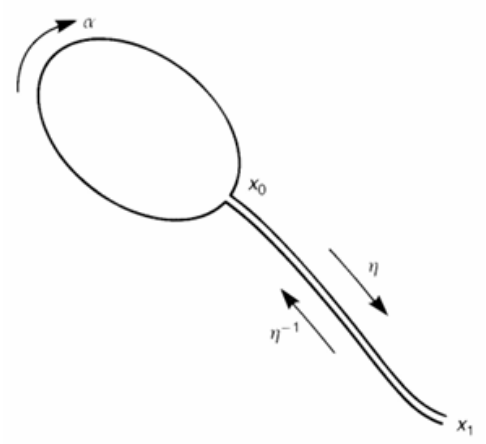


图 3: 从 x_0 处的环路构造 x_1 处的环路

证明. 取道路 $\eta : I \to X$ 满足 $\eta(0) = x_0$，$\eta(1) = x_1$. 若 α 为 x_0 处的环路，则 $\eta^{-1} * \alpha * \eta$ 是以 x_1 为基点的环路. 如图(3)，定义映射

$$P_\eta : \pi_1(X, x_0) \to \pi_1(X, x_1), \quad [\alpha] \mapsto [\eta^{-1} * \alpha * \eta] \tag{19}$$

下面证明 P_η 为同态. 对任意 $[\alpha], [\beta] \in \pi_1(X, x_0)$,

$$P_\eta([\alpha] * [\beta]) = [\eta^{-1} * \alpha * \beta * \eta] = [\eta^{-1} * \alpha * \eta * \eta^{-1} * \beta * \eta] = P_\eta([\alpha]) * P_\eta([\beta]) \tag{20}$$

构造逆映射 $P_\eta^{-1}:\pi_1(X,x_1)\to\pi_1(X,x_0)$，

$$P_\eta^{-1}([\alpha'])=[\eta*\alpha'*\eta^{-1}] \tag{21}$$

则

$$P_\eta^{-1}\circ P_\eta([\alpha])=[\eta*\eta^{-1}*\alpha*\eta*\eta^{-1}]=[\alpha] \tag{22}$$

同理 $P_\eta\circ P_\eta^{-1}=\mathrm{id}$. 故 P_η 为同构. □

因此，道路连通空间的基本群可简记为 $\pi_1(X)$.

2.3 基本群的同伦不变性

我们可以将同伦概念推广到任意连续映射.

定义 2.2. 设 $f,g:X\to Y$ 为连续映射. 若存在连续映射 $F:X\times I\to Y$ 使得

$$F(x,0)=f(x),\quad F(x,1)=g(x) \tag{23}$$

则称 f 同伦于 g，记作 $f\sim g$. F 称为同伦.

定义 2.3. 拓扑空间 X 与 Y 具有相同的同伦型（记作 $X\simeq Y$），若存在连续映射 $f:X\to Y$ 与 $g:Y\to X$，使得

$$f\circ g\sim \mathrm{id}_Y,\quad g\circ f\sim \mathrm{id}_X \tag{24}$$

称 f 为同伦等价，g 为其同伦逆.

我们回忆同胚的定义是，存在连续映射 $f:X\to Y$ 与 $g:Y\to X$ 使得 $f\circ g=\mathrm{id}_Y$ 且 $g\circ f=\mathrm{id}_X$. 可见同胚的拓扑空间必然具有相同同伦型. 但反之不成立，例如 $\{p\}$ 和 $\mathbb{R}$ 属同一同伦型

命题 2.4. “具有相同同伦型”是拓扑空间集合上的等价关系.

证明. 自反性显然. 对称性由定义直接得到. 下面只证传递性. 设 $f:X\to Y$ 是同伦等价，同伦逆 $f':Y\to X$，$g:Y\to Z$ 是同伦等价，同伦逆 $g':Z\to Y$. 则

$$(g\circ f)(f'\circ g')=g(f\circ f')g'\sim g\circ \mathrm{id}_Y\circ g'=g\circ g'\sim \mathrm{id}_Z \tag{25}$$

$$(f'\circ g')(g\circ f)=f'(g'\circ g)f\sim f'\circ \mathrm{id}_Y\circ f=f'\circ f\sim \mathrm{id}_X \tag{26}$$

故 $X\simeq Z$. □

我们不加证明地引入以下重要定理

定理 2.5. 若 $X\simeq Y$，且 $f:X\to Y$ 为同伦等价，则 $\pi_1(X,x_0)\cong\pi_1(Y,f(x_0))$.

推论. 基本群在同胚下不变，因而是拓扑不变量.

2.4 形变收缩与可缩空间

定义 2.4. 设 $R\neq\emptyset$ 为 X 的子空间. 若存在连续映射 $f:X\to R$ 使得 $f|_R=\mathrm{id}_R$，则称 R 为 X 的收缩核，f 称为收缩映射.

收缩映射把整个 X 都映到 R 而保持 R 中的点不变.

定义 2.5. 若存在连续映射 $H : X \times I \to X$ 满足

$$H(x,0) = x, \quad H(x,1) \in R, \quad (\forall x \in X) \tag{27}$$

$$H(x,t) = x \quad (\forall x \in R, \forall t \in I) \tag{28}$$

则称 R 为 X 的形变收缩核. 此时 H 是 id_X 与某个收缩映射 $f : X \to R$ 之间的同伦，且在 R 上固定不动.

直观上看，H 将 X 连续地收缩到 R 中，t 则是形变过程的参数. $t = 0$ 时，$H(x,0)$ 是整个 X 上的恒等映射，$t = 1$ 时，$H(x,1)$ 把 X 中的所有点都映到 R 中，且对形变过程中的任意 t，$H(x,t)$ 限制在 R 上都是恒等映射.

若 R 是 X 的形变收缩核，则 $X \simeq R$，从而

$$\pi_1(X,a) \cong \pi_1(R,a), \quad a \in R \tag{29}$$

例 2.2. 单位圆 S^1 是环形区域 $Y = \{re^{i\theta} \mid \frac{1}{2} \le r \le \frac{3}{2}\}$ 的形变收缩核. 映射 $g : Y \to S^1, \quad re^{i\theta} \mapsto e^{i\theta}$，则 $g \circ \mathrm{id}_Y$ 与恒等映射通过

$$H(re^{i\theta}, t) = [1 + (r-1)(1-t)]e^{i\theta} \tag{30}$$

同伦，且 S^1 上点保持固定. 故 $\pi_1(S^1) \cong \pi_1(Y)$.

定义 2.6. 若单点集 $\{a\}$ 是 X 的形变收缩核，即存在同伦 $H : X \times I \to X$ 使得

$$H(x,0) = a, \quad H(x,1) = x, \quad H(a,t) = a \tag{31}$$

则称 X 为可缩的.

例 2.3. $\mathbb{R}^n$ 可缩至原点，取 $H(x,t) = tx$ 即可. 任何凸子集亦然.

定理 2.6. 可缩空间的基本群是平凡的，即 $\pi_1(X) \cong \{e\}$.

证明. 可缩空间与单点空间同伦型相同，而单点空间的基本群平凡. □

定义 2.7. 若道路连通空间的基本群平凡，则称其为单连通.

例 2.4. 证明 S^1 是 $D^2 \setminus \{0\}$ 的形变收缩核，其中 $D^2 = \{(x,y) \mid x^2 + y^2 \le 1\}$. 推广到 S^n 是 $D^{n+1} \setminus \{0\}$ 的形变收缩核.

定义映射 $H : X \times I \to X$ 为

$$H(\mathbf{x}, t) = (1-t)\mathbf{x} + t\frac{\mathbf{x}}{\|\mathbf{x}\|} \tag{32}$$

当 $t = 0$ 时

$$H(\mathbf{x}, 0) = \mathbf{x} \tag{33}$$

当 $t = 1$ 时

$$H(\mathbf{x}, 1) = \frac{\mathbf{x}}{\|\mathbf{x}\|} \tag{34}$$

其像落在单位球面 S^n 上，因为

$$\left\| \frac{\mathbf{x}}{\|\mathbf{x}\|} \right\| = 1 \tag{35}$$

若 $\mathbf{x} \in S^n$，即 $\|\mathbf{x}\| = 1$，则

$$H(\mathbf{x}, t) = (1-t)\mathbf{x} + t\mathbf{x} = \mathbf{x} \tag{36}$$

因此对所有 $t \in I$ 都有 $H(\mathbf{x},t) = \mathbf{x}$. 我们还需确保 $H(\mathbf{x},t) \neq 0$，即收缩过程不会落到被挖掉的原点. 注意到 $\mathbf{x} \neq 0$，令 $r = \|\mathbf{x}\|$，则 $0 < r \leq 1$. 由表达式

$$H(\mathbf{x},t) = \left((1-t) + \frac{t}{r}\right)\mathbf{x} \tag{37}$$

其系数为

$$(1-t) + \frac{t}{r} = \frac{r(1-t)+t}{r} \tag{38}$$

因为 $r > 0$，且 $t \in [0,1]$，分子 $r(1-t)+t > 0$，故系数严格为正. 因此 $H(\mathbf{x},t) \neq 0$.

此外，还需验证 $H(\mathbf{x},t) \in D^{n+1}$

$$\|H(\mathbf{x},t)\| = \left((1-t) + \frac{t}{r}\right) \cdot r = r(1-t) + t \tag{39}$$

由于 $r \leq 1$，有

$$r(1-t) + t \leq (1)(1-t) + t = 1 \tag{40}$$

且该值非负. 故 $H(\mathbf{x},t) \in D^{n+1} \setminus \{0\}$.

3 圆环的基本群

圆环 S^1 的基本群是整数加法群 $\mathbb{Z}$. 为证明这一点，需借助覆盖映射 $\mathbb{R} \to S^1$ 来分析.

定义 3.1. 设 $S^1 = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$，定义覆盖映射

$$p : \mathbb{R} \to S^1, \quad p(x) = \exp(\mathrm{i}x) \tag{41}$$

取基点 $1 \in S^1$，其提升为 $0 \in \mathbb{R}$. 考虑等价关系 $x \sim y \iff x - y = 2\pi m$（$m \in \mathbb{Z}$），模去等价类即得

$$S^1 \cong \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z} \tag{42}$$

设 $\tilde{f} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 连续，满足 $\tilde{f}(0) = 0$ 且

$$\tilde{f}(x + 2\pi) \sim \tilde{f}(x) \tag{43}$$

则 $\tilde{f}$ 诱导出映射 $f : \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z} \to \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ 满足

$$f([x]) = p \circ \tilde{f}(x) \tag{44}$$

对 $[0] \in \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ 亦即 $1 \in S^1$，有 $f(1) = p \circ \tilde{f}(0) = p(0) = 1$. 存在唯一整数 n（与 x 无关），使得

$$\tilde{f}(x + 2\pi) = \tilde{f}(x) + 2\pi n \tag{45}$$

反过来也是成立的，即

定义 3.2. 满足 $f(1) = 1$ 的映射 $f : S^1 \to S^1$ 和满足 $\tilde{f}(0) = 0$ 及 $\tilde{f}(x + 2\pi) = \tilde{f}(x) + 2\pi n$ 的映射 $\tilde{f} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 是一一对应的. 该整数 n 称为由 $\tilde{f}$ 诱导的映射 $f : S^1 \to S^1$ 的**度**，记作 $\deg(f)$.

几何上，n 的意义是，当参数 x 变化 2π 时，$p(x)$ 在 S^1 上绕了几圈. 在 S^1 上走一圈还是回到原点，看不出来什么区别，所以需要引入 $\tilde{f}$ 这个映射来分辨.

引理 3.1. *设 $f, g : S^1 \to S^1$ 且 $f(1) = g(1) = 1$，则*

$$\deg(f) = \deg(g) \iff f \sim g \tag{46}$$

并且对任意 $n \in \mathbb{Z}$，存在 $f : S^1 \to S^1$ 满足 $\deg(f) = n$.

证明. 先证充分性. 设 $\deg(f)=\deg(g)$，取对应的提升 $\tilde{f},\tilde{g}:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$. 定义线性同伦

$$\tilde{F}(x,t)=t\tilde{f}(x)+(1-t)\tilde{g}(x) \tag{47}$$

则 $\tilde{F}$ 在 $\mathbb{R}\times I$ 上连续，且 $\tilde{F}(x+2\pi,t)=\tilde{F}(x,t)+2\pi n$，故可投影为 $F=p\circ\tilde{F}:S^1\times I\to S^1$，即 f 与 g 间的同伦.

再证必要性. 若 $f\sim g$，存在同伦 $F:S^1\times I\to S^1$ 保持基点固定. 提升为 $\tilde{F}:\mathbb{R}\times I\to\mathbb{R}$，满足

$$\tilde{F}(x+2\pi,t)=\tilde{F}(x,t)+2\pi n(t) \tag{48}$$

由连续性，$n(t)$ 为常数，故 $\deg(f)=\deg(g)$.

取 $\tilde{f}(x)=nx$，则投影 $f([x])=[nx]$ 的度数为 n. □

因此，保持基点的映射 $S^1\to S^1$ 的同伦类与整数一一对应. 进一步，该对应为群同构.

定理 3.2.

$$\pi_1(S^1)\cong\mathbb{Z} \tag{49}$$

证明. 保持基点的环 $\alpha:S^1\to S^1$ 的同伦类 $[\alpha]$ 对应度数 $\deg(\alpha)\in\mathbb{Z}$. 由引理可知该映射为双射. 对环的乘积，若 $\deg(f)=n$，$\deg(g)=m$，则提升满足

$$\widetilde{f*g}(x+2\pi)=\widetilde{f*g}(x)+2\pi(n+m) \tag{50}$$

故

$$\deg(f*g)=\deg(f)+\deg(g) \tag{51}$$

即保持群运算，故为同构. □

4 乘积空间的基本群

定理 4.1. 设 X,Y 道路连通，则

$$\pi_1(X\times Y,(x_0,y_0))\cong\pi_1(X,x_0)\oplus\pi_1(Y,y_0) \tag{52}$$

证明. 定义投影 $p_1:X\times Y\to X$，$p_2:X\times Y\to Y$. 对环 α 于 (x_0,y_0)，$\alpha_1=p_1\circ\alpha$ 为 X 中以 x_0 为基点的环，$\alpha_2=p_2\circ\alpha$ 为 Y 中以 y_0 为基点的环. 反之，任意一对环 (α_1,α_2) 确定唯一环 $\alpha(s)=(\alpha_1(s),\alpha_2(s))$. 定义

$$\varphi([\alpha])=([\alpha_1],[\alpha_2]) \tag{53}$$

该映射具有明显逆映射

$$\varphi^{-1}([\alpha_1],[\alpha_2])=[(\alpha_1,\alpha_2)] \tag{54}$$

故为同构. □

例 4.1. (1) 环面 $T^2=S^1\times S^1$，有

$$\pi_1(T^2)\cong\mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z} \tag{55}$$

一般地，n 维环面 $T^n=\underbrace{S^1\times\cdots\times S^1}_{n}$ 的基本群为

$$\pi_1(T^n)\cong\underbrace{\mathbb{Z}\oplus\cdots\oplus\mathbb{Z}}_{n} \tag{56}$$

(2) 圆柱 $X=S^1\times\mathbb{R}$，因 $\pi_1(\mathbb{R})\cong\{e\}$，得

$$\pi_1(X)\cong\mathbb{Z} \tag{57}$$

5 自由群与群的表现

为系统计算基本群，需先引入自由群和群的表现的概念.

定义 5.1. 设 $X=\{x_j\}$ 为群 G 的子集. 若任意 $g\in G-\{e\}$ 均可唯一写成

$$g=x_1^{i_1}x_2^{i_2}\cdots x_n^{i_n} \tag{58}$$

其中 n 有限，$i_k\in\mathbb{Z}$，且相邻因子不同（$x_j\neq x_{j+1}$），则称 X 为 G 的**自由生成元集**，G 称为**自由群**.

定义 5.2. 给定集合 X（元素称为**字母**），形如

$$w=x_1^{i_1}x_2^{i_2}\cdots x_n^{i_n} \tag{59}$$

的表达式称为**单词**. 若 $i_j\neq 0$ 且 $x_j\neq x_{j+1}$，则称其为**约化单词**. 空单词记为 1.

约化规则要求合并相邻同底幂次，删除零次项. 例如：

$$a^2b^3a^3b^2c^2c^4=a^2b^3a^3b^3c^2 \tag{60}$$

乘积定义为单词的拼接后约化. 逆元定义为

$$w^{-1}=x_n^{-i_n}\cdots x_2^{-i_2}x_1^{-i_1} \tag{61}$$

所有约化单词在拼接约化乘法下构成自由群，记为 $F[X]$.

任意群 G 可由生成元及关系给出. 若关系写作

$$r=x_1^{i_1}x_2^{i_2}\cdots x_n^{i_n}=1 \tag{62}$$

则称 $(x_1,\dots,x_p;r_1,\dots,r_q)$ 为 G 的**表现**.

设 $F[X]$ 为 X 生成的自由群. 自然满同态

$$\varphi:F[X]\to G,\quad x_1^{i_1}\cdots x_n^{i_n}\mapsto x_1^{i_1}\cdots x_n^{i_n}\in G \tag{63}$$

的核为正规子群，且

$$F[X]/\ker\varphi\cong G \tag{64}$$

例 5.1. 循环群 $\mathbb{Z}_n=(x;x^n)$，自由阿贝尔群 $\mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z}=(x,y;xyx^{-1}y^{-1})$.

6 多面体的基本群

若拓扑空间 X 可三角剖分，则可系统计算其基本群. 设 $f:|K|\to X$ 为三角剖分，由于基本群是拓扑不变量，$\pi_1(X)\cong\pi_1(|K|)$.

6.1 边群

定义 6.1. 单纯复形 K 中的**边道路**为顶点序列 $v_0v_1\dots v_k$，其中相邻顶点构成 0-或 1-单形. 若 $v_0=v_k=v$，则称为**边环**.

通过引入以下替换规则，如图(4)，在边环上定义等价关系

1. 若 $\langle uvw\rangle$ 为 2-单形，则 uvw 可替换为 uw，反之亦可；
2. 若 $u=w$，则 uvw 可替换为单点 u，反之亦可.

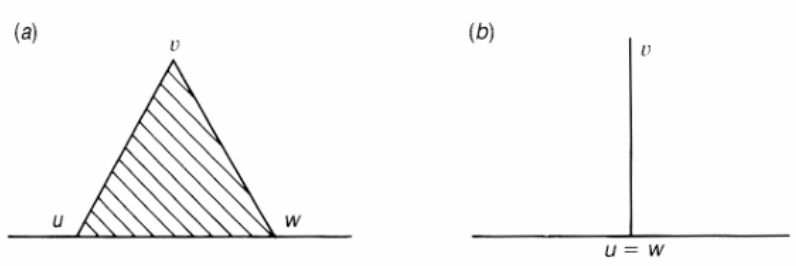


图 4: 边环的替换规则

记 v 处边环 $vu_1\cdots u_{k-1}v$ 的等价类为 $\{vu_1\cdots u_{k-1}v\}$. 等价类在拼接乘法

$$\{vu_1\cdots u_{k-1}v\}*\{vw_1\cdots w_{j-1}v\}=\{vu_1\cdots u_{k-1}vw_1\cdots w_{j-1}v\} \tag{65}$$

下构成群，称为 K 在 v 处的**边群** $E(K;v)$.

我们不加证明地引入如下定理

定理 6.1.

$$E(K;v)\cong\pi_1(|K|;v) \tag{66}$$

6.2 计算步骤

为计算边群，选取 K 的**极大树** T_M，即包含所有顶点且单连通的 1-维子复形. 由于树中边对应平凡同伦类，可忽略. **计算规则**如下

1. 对 $K-L$ 中每条 1-单形 $\langle v_iv_j\rangle$ $(i<j)$，分配生成元 g_{ij}；
2. 若 $\langle v_iv_j\rangle\in L$，则 $g_{ij}=1$；
3. 对每个 2-单形 $\langle v_iv_jv_k\rangle$ $(i<j<k)$，添加关系

$$g_{ij}g_{jk}=g_{ik} \tag{67}$$

则

$$\pi_1(|K|)\cong G(K;L) \tag{68}$$

6.3 2-骨架引理

考虑边群的构造过程，边群的生成元来自 1-单形，关系来自 2-单形，更高维单形不参与. 所以显然有

定理 6.2. *设 K 为单纯复形，$K^{(2)}$ 为其 2-骨架（即所有 0、1、2 维单形的并），则*

$$\pi_1(|K|)\cong\pi_1(|K^{(2)}|) \tag{69}$$

例 6.1. $(n+1)$-单形 σ_{n+1} 与其边界 $\partial\sigma_{n+1}$ 具有相同的 2-骨架. σ_{n+1} 同胚于实心球 D^{n+1}，因而是可缩的，故 $\pi_1(\sigma_{n+1})\cong\{e\}$. 由(6.2)

$$\pi_1(S^n)\cong\pi_1(\partial\sigma_{n+1})\cong\pi_1(\sigma_{n+1})\cong\{e\},\quad n\geq 2 \tag{70}$$

此即

$$\pi_1(S^n)\cong\{e\},\quad n\geq 2 \tag{71}$$

6.4 花束（Bouquet）的基本群

定义 6.2. n-花束定义为 n 个圆的一点并，记作 $\bigvee_{i=1}^{n} S^1$.

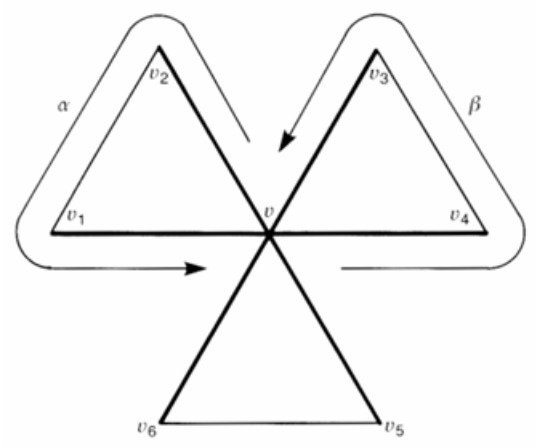


图 5: 3-Bouquet 的三角剖分

例 6.2. 取公共点 v 为基点. 对 3-花束，如图(5)，三角剖分后选取极大树 L（图中粗线），生成元为 g_{12}, g_{34}, g_{56}，无非平凡 2-单形，故无关系

$$\pi_1(\text{3-花束}) = (x, y, z; \emptyset) \tag{72}$$

一般地，

$$\pi_1\left(\bigvee_{i=1}^{n} S^1\right) \cong F_n \tag{73}$$

其中 F_n 为 n 个生成元的自由群，是非交换的. 直观上，绕不同洞的环 α, β 满足

$$[\alpha] * [\beta] * [\alpha]^{-1} \neq [\beta] \tag{74}$$

因此

$$[\alpha] * [\beta] \neq [\beta] * [\alpha] \tag{75}$$

6.5 环面的基本群

图 (6)给出环面 $T^2 = S^1 \times S^1$ 的三角剖分. 阴影区域选为子复形 L（包含所有顶点，且道路连通、单连通）. 选取生成元 $x = g_{02}$，$y = g_{04}$. 由各 2-单形的关系可逐次推出

$$g_{02} = g_{07} = g_{37} = g_{38} = g_{48} = x \tag{76}$$

$$g_{04} = g_{06} = g_{16} = g_{18} = g_{28} = y \tag{77}$$

$$g_{24} = x^{-1}y \tag{78}$$

最后由关系 $x^{-1}yx = y$，即

$$xyx^{-1}y^{-1} = 1 \tag{79}$$

故

$$\pi_1(T^2) = (x, y; xyx^{-1}y^{-1}) \cong \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \tag{80}$$

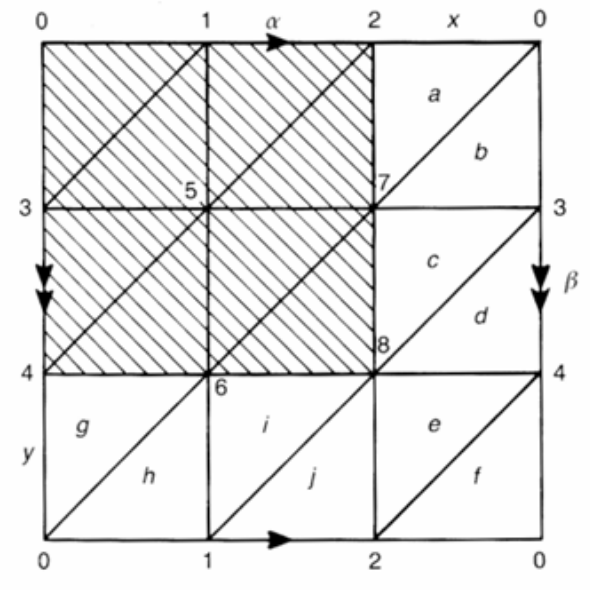


图 6: 环面的三角剖分

与乘积空间公式一致.

几何上，取环 $\alpha = 0 \to 1 \to 2 \to 0$ 和 $\beta = 0 \to 3 \to 4 \to 0$，分别对应 x 和 y. 关系

$$\alpha * \beta * \alpha^{-1} * \beta^{-1} \sim c_v \tag{81}$$

如图 (7) 所示.

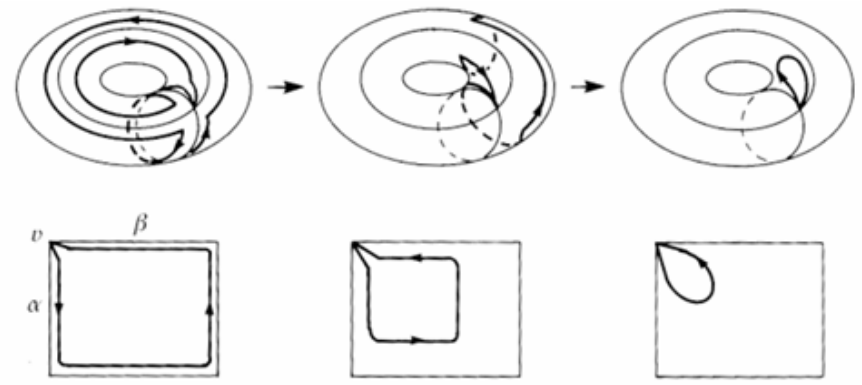


图 7: $\alpha * \beta * \alpha^{-1} * \beta^{-1} \sim c_v$

设 Σ_g 为亏格 g 的闭曲面（g 个环柄的环面）. 其基本群有 $2g$ 个生成元 α_i, β_i（$i = 1, \ldots, g$），满足单一关系

$$\prod_{i=1}^{g} (\alpha_i * \beta_i * \alpha_i^{-1} * \beta_i^{-1}) \sim c_v \tag{82}$$

若将对应生成元记为 x_i, y_i，则

$$\pi_1(\Sigma_g) = \left(x_1, y_1, \ldots, x_g, y_g; \prod_{i=1}^{g} (x_i y_i x_i^{-1} y_i^{-1}) = 1 \right) \tag{83}$$

6.6 射影平面 $\mathbb{R}P^2$ 的基本群

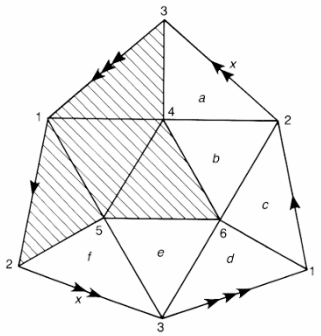


图 8: 射影平面的三角剖分

图 (8) 给出了射影平面 $\mathbb{R}P^2$ 的三角剖分. 阴影区域为子复形 L. 共有 7 个生成元和 6 个关系. 取生成元 $x = g_{23}$，逐条写出关系如下

$$g_{23}g_{34} = g_{24} \quad \Longrightarrow \quad g_{24} = x \tag{84}$$

$$g_{24}g_{46} = g_{26} \quad \Longrightarrow \quad g_{26} = x \tag{85}$$

$$g_{12}g_{26} = g_{16} \quad \Longrightarrow \quad g_{16} = x \tag{86}$$

$$g_{13}g_{36} = g_{16} \quad \Longrightarrow \quad g_{36} = x \tag{87}$$

$$g_{35}g_{56} = g_{36} \quad \Longrightarrow \quad g_{56} = x \tag{88}$$

$$g_{23}g_{35} = g_{25} \quad \Longrightarrow \quad x \cdot g_{35} = 1 \quad \Longrightarrow \quad g_{35} = x^{-1} \tag{89}$$

所有生成元均可用 x 和 x^{-1} 表示. 最终关系为

$$x^2 = 1 \tag{90}$$

因此

$$\pi_1(\mathbb{R}P^2) \cong (x; x^2) \cong \mathbb{Z}_2 \tag{91}$$

在 $\mathbb{R}P^2$ 中

- 环 α 可连续缩为一点，故为平凡元素；
- 环 β 无法缩为一点，故为非平凡元素；
- 由于对径点等同，$\beta * \beta$ 在几何上对应绕两圈. 由图 (9)(b) 可见，$\beta * \beta$ 可连续缩为一点.

因此，对应环 β 的生成元 x 满足关系

$$x^2 = 1 \tag{92}$$

这从几何上验证了 $\pi_1(\mathbb{R}P^2) \cong \mathbb{Z}_2$.

同样的几何论证可用于 $\mathbb{R}P^3$. $\mathbb{R}P^3$ 可视为 S^3 在对径点等同的商空间

$$\mathbb{R}P^3 = S^3/(x \sim -x) \tag{93}$$

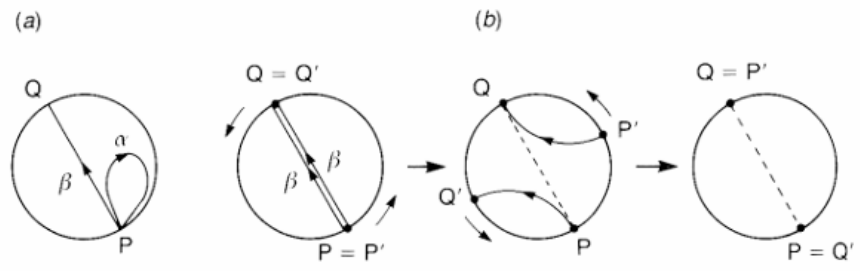


图 9: 射影平面上的环路

取 S^3 的半球作为代表元，则 $\mathbb{R}P^3$ 可表示为实心球 D^3，其球面上的对径点被认同. 将图 (9)中的圆盘 D^2 替换为实心球 D^3，同样的论证给出

$$\pi_1(\mathbb{R}P^3) \cong \mathbb{Z}_2 \tag{94}$$

事实上，对任意 $n \geq 2$，有

$$\pi_1(\mathbb{R}P^n) \cong \mathbb{Z}_2 \tag{95}$$