拓扑学基础与同调群

呜哩天才琪露诺

华中科技大学物理学院

日期：2026 年 8 月 1 日

目录

1 同胚与拓扑不变量 **1**

2 Euler 示性数 **2**

3 单纯形与单纯复形 **4**

4 单纯复形的同调群 **5**

4.1 有向单纯形 5

4.2 链群、闭链群和边缘链群 5

4.3 同调群 7

5 同调群的性质与 Betti 数 **9**

5.1 连通复形的第 0 同调群 9

5.2 多连通分量的情形 10

5.3 同调群的扭群与 Betti 数 10

1 同胚与拓扑不变量

定义 1.1 (同胚)**.** 设 X_1, X_2 为拓扑空间，连续映射 $fX_1 \to X_2$ 称为同胚，若其逆映射 $f^{-1}X_2 \to X_1$ 也连续. 若 X_1 与 X_2 可以建立同胚映射，则称它们是同胚的. 等价地，X_1 与 X_2 同胚，若存在映射 $fX_1 \to X_2$，$gX_2 \to X_1$ 使得 $f \circ g = \mathrm{id}_{X_2}$，$g \circ f = \mathrm{id}_{X_1}$.

评论. 映射可逆等价于它是双射. 连续双射的逆映射未必连续.

我们很容易得到以下的命题

命题 1.1. *同胚是等价关系.*

我们引入拓扑不变量的概念. 拓扑不变量是在同胚变换下不变的量，也就是说，若两个空间的拓扑不变量不同，则它们一定不同胚. 我们不加证明地陈述以下命题

命题 1.2. *连通性、紧性、Hausdorff 性质都是拓扑不变量.*

例 1.1.

- $[-1,1]$ 紧而 $(-1,1)$ 非紧，故 $[-1,1]$ 与 $(-1,1)$ 不同胚；

- 抛物线 $y=x^2$ 连通而双曲线 $x^2-y^2=1$ 不连通，故它们不同胚；
- $[-1,1]$ 单连通而 S^1 多连通，故它们不同胚；从另一个方面，$S^1-\{p\}$ 连通而 $[-1,1]-\{0\}$ 不连通，也可以得到相同的结论；
- $\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$ 与 $\mathbb{R}$ 同胚，同胚映射为

$$f\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)\to\mathbb{R},\quad x\mapsto\tan x \tag{1}$$

可是，$\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$ 有界而 $\mathbb{R}$ 无界. 这说明有界性并不是拓扑不变量.

2 Euler 示性数

前面所说的连通性、紧性、Hausdorff 性都是拓扑空间的性质，而拓扑不变量也可以是和拓扑空间有关的某个数. 先考虑 $\mathbb{R}^3$ 中的多面体，多面体的面、边、顶点称为单纯形. 显然单纯形要么不相交（比如正方体相对的两个面），要么交集为单纯形（比如正方体相邻的两个面相交于一条边）. 我们可以引入 Euler 示性数的概念

定义 2.1 (Euler 示性数)**.** $X\subseteq\mathbb{R}^3$ 与多面体 K 同胚，则其 Euler 示性数

$$\chi(X)=K\text{ 的顶点数}-K\text{ 的边数}+K\text{ 的面数} \tag{2}$$

我们有如下的定理保证这个定义是良好的（不依赖于 K 的选择）.

定理 2.1 (Poincáre-Alexander)**.** *$\chi(X)$ 与多边形 K 无关，只要 K 与 X 同胚.*

例 2.1. 一个点的示性数 $\chi(\cdot)=1$，一条边的示性数 $\chi(-)=2-1=1$，一个三角形（包含内部）的示性数 $\chi(\triangle)=3-3+1=1$.

例 2.2. 对于 S^1，易见它是与三角形的三条边同胚的（想象圆的内接三角形），从而

$$\chi(S^1)=3-3=0 \tag{3}$$

对于 S^2，易见它是与空心四面体同胚的，从而

$$\chi(S^2)=4-6+4=2 \tag{4}$$

当然，S^2 也是与空心立方体同胚的，从而

$$\chi(S^2)=8-12+6=2 \tag{5}$$

结果是一致的. 同时可以得到立体几何中的定理

定理 2.2 (Euler)**.** *设多面体 K 与 S^2 同胚，其边数为 E，顶点数为 V，面数为 F，则*

$$V-E+F=2 \tag{6}$$

例 2.3. 考虑环面 T^2，它同胚于一个矩形，但矩形的对边按(1)所示的方式粘了起来. 这样一来就只剩下一个顶点、两条边，于是其示性数为

$$\chi(T^2)=1-2+1=0 \tag{7}$$

评论. 这里的“粘起来”是不准确的说法. 严格地，我们定义等价关系 $(x_1,y_1)\sim(x_2,y_2)$ 当且仅当存在 $n_x,n_y\in\mathbb{Z}$ 使得 $x_2=x_1+2\pi n_x$, $y_2=y_1+2\pi n_y$. 则 $T^2=\mathbb{R}^2/\sim$. 图示中的箭头数目表示被黏在一起的边

例 2.4. 考虑 Klein 瓶，它同胚于一个矩形，但矩形的对边按(2)(a) 所示的方式粘了起来. 同样地，其示性数为

$$\chi(\text{Klein 瓶})=1-2+1=0 \tag{8}$$

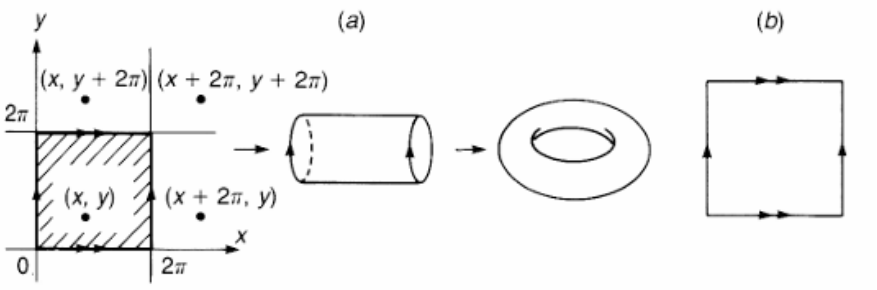


图 1

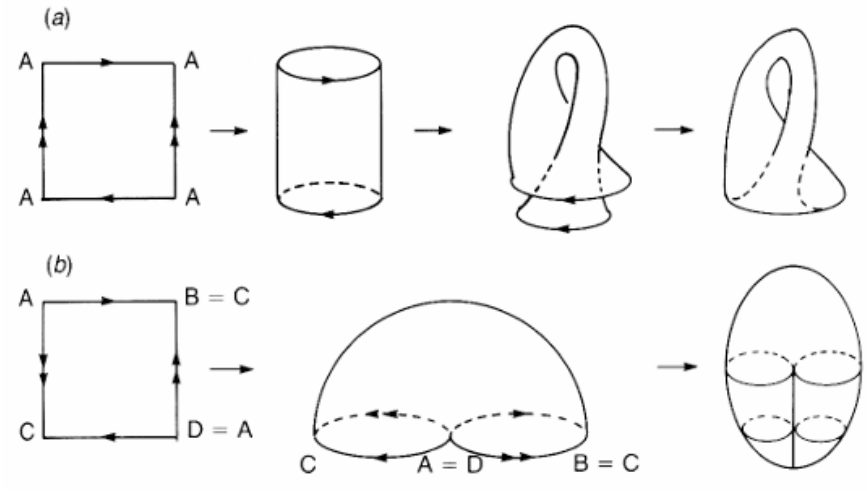


图 2

定义 2.2 (连通和)**.** 设 X 和 Y 为拓扑空间. 从 X 和 Y 表面各挖去一个圆盘，再用柱面把它们连起来，得到的空间称为它们的连通和，记作 $X\#Y$.

例 2.5. 对任意曲面 X 都有

$$S^2\#X = X \tag{9}$$

想象 X 上长出一根管子，管子上连着一个球. 我们可以连续地缩短这根管子，得到的就是有一个球形凸起的 X. 再把这个凸起熨平，就得到 X. 以上各个操作都是连续的，所以 $S^2\#X = X$.

定理 2.3. *设 X 和 Y 为两曲面，则*

$$\chi(X\#Y) = \chi(X) + \chi(Y) - 2 \tag{10}$$

证明. 设 X 和 Y 上可以找到两个一样的三角形，把它们去掉. 再用截面为这个三角形的棱柱把 X 和 Y 连起来. 这样，顶点的数目不变. 去掉两个三角形，多出三棱柱的三个侧面，面数的变化为 $-2+3=1$. 边数的变化为 $+3$. 从而 $\Delta\chi = 0-3+1 = 2$. □

例 2.6. g 个 T^2 的连通和记作 Σ_g，g 称为环面 Σ_g 的亏格. 其示性数

$$\chi(\Sigma_g) = g\times 0 - 2(g-1) = 2-2g \tag{11}$$

Euler 示性数之所以重要，是因为它是拓扑不变量. 有定理

定理 2.4. *Euler 示性数 χ 是拓扑不变量. 换言之，若 $\chi(X)\neq\chi(Y)$，则拓扑空间 X 与 Y 不同胚.*

我们举一反例说明逆命题是不成立的.

例 2.7. 一个点的示性数和一条边的示性数都是 1，但它们不同胚，说明不同胚的空间可以有相同的示性数.

3 单纯形与单纯复形

单纯形是多面体的基本构件. 0-单纯形是点，1-单纯形是线段，2-单纯形是包括内部的三角形，3-单纯形是实心四面体. 一般地

定义 3.1 (单纯形)**.** 设 $p_0, p_1, \cdots, p_r$ 是一组几何独立的点，则 r-单纯形是

$$\sigma^r = \left\{ x\in\mathbb{R}^m \;\middle|\; x=\sum_{i=0}^{r} c_i p_i,\ c_i\geq 0,\ \sum_{i=0}^{r} c_i = 1 \right\} \tag{12}$$

几何独立的指不存在 $(r-1)$-维超平面包含所有 $r+1$ 个点. $(c_0,\ldots,c_r)$ 称为 x 的重心坐标.

定义 3.2 (面)**.** 若从 $p_0,\ldots,p_r$ 中选取 $q+1$ 个点 $p_{i_0},\ldots,p_{i_q}$ $(0\leq q\leq r)$，则这些点定义了一个 q-单纯形 $\sigma_q = \langle p_{i_0},\ldots,p_{i_q}\rangle$，称为 σ_r 的 q-面. 记作 $\sigma_q \preceq \sigma_r$. 若 $\sigma_q\neq\sigma_r$，则称为真面，记作 $\sigma_q < \sigma_r$.

一个 r-单纯形中 q-面的个数为 $\binom{r+1}{q+1}$. 例如，3-单纯形有 1 个 3-面、4 个 2-面、6 个 1-面和 4 个 0-面.

定义 3.3 (单纯复形)**.** 设 K 是 $\mathbb{R}^m$ 中有限个单纯形的集合. 若满足以下条件，则称 K 为单纯复形

1. 若 $\sigma\in K$ 且 $\sigma'\leq\sigma$，则 $\sigma'\in K$（面的封闭性）;
2. 若 $\sigma,\sigma'\in K$，则 $\sigma\cap\sigma'$ 要么为空，要么是 σ 和 σ' 的公共面.

K 的维数定义为其中单纯形的最大维数.

定义 3.4 (多面体)**.** 单纯复形 K 中所有单纯形的并集称为 K 的多面体，记作 $|K|$. $\dim|K| = \dim K$.

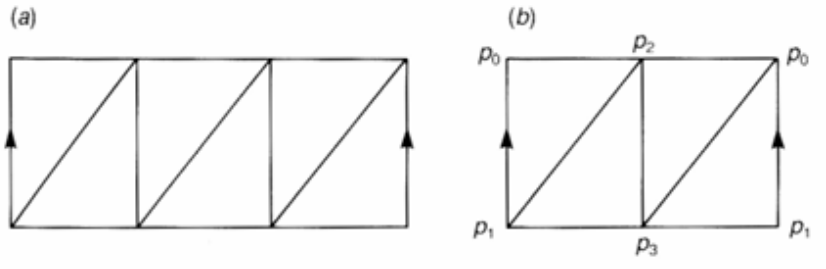


图 3: 柱面的三角剖分

定义 3.5 (三角剖分)**.** 若拓扑空间 X 与某个单纯复形的多面体 $|K|$ 同胚，则称 X 是可三角剖分的，(K, f) 称为 X 的三角剖分.

例 3.1. 图(3)中 (a) 是圆柱面 $S^1 \times [0,1]$ 的一个三角剖分. (b) 不是三角剖分，因为 $\langle p_0p_1p_2\rangle \cap \langle p_2p_3p_0\rangle = \langle p_0\rangle \cup \langle p_2\rangle$，既非空也非单纯形. 可能会有人疑惑，为什么 $\langle p_1p_2\rangle \notin \langle p_0p_1p_2\rangle \cap \langle p_2p_3p_0\rangle$ 呢？这是因为，我们只有 $(x_0, y_0) \sim (x_0 + 2\pi, y_0)$，也就是说，尽管 $\langle p_0p_2\rangle$ 和 $\langle p_2p_0\rangle$ 的两个端点都是相同的，两个线段本身并不是一样的，因为我们只把左边的 p_0 和右边的 p_0 粘在一起. 问题本质上就出在，我们把不同线段的端点指认为相同的，这是不合理的. 只要像 (a) 那样，把上下边分为三段，就能避免不同线段具有相同端点. 这也符合我们的直觉，因为上下边对应圆柱的上下圆，而确定一个圆需要三个点.

4 单纯复形的同调群

4.1 有向单纯形

对 $r \geq 1$ 的单纯形可赋予定向. 我们用 $(p_0p_1 \dots p_r)$ 表示有向单纯形.

- 1-单纯形(p_0p_1) 表示从 p_0 到 p_1 的有向线段，且 $(p_0p_1) = -(p_1p_0)$.
- 2-单纯形$(p_0p_1p_2)$ 表示带定向的三角形区域，满足

$$(p_0p_1p_2) = (p_2p_0p_1) = (p_1p_2p_0) = -(p_0p_2p_1) = -(p_2p_1p_0) = -(p_1p_0p_2). \tag{13}$$

- 一般 r-单纯形设 P 为 $(0, 1, \dots, r)$ 的置换，则

$$(p_{i_0}p_{i_1} \cdots p_{i_r}) = \operatorname{sgn}(P)(p_0p_1 \cdots p_r). \tag{14}$$

对于 $r = 0$，有向 0-单纯形就是一个点 $\sigma_0 = p_0$.

4.2 链群、闭链群和边缘链群

定义 4.1 (r-链群)**.** 设 K 为 n 维单纯复形. K 的 r-链群 $C_r(K)$ 是由 K 中有向 r-单纯形生成的自由阿贝尔群. 若 $r > \dim K$，则 $C_r(K) = 0$. $C_r(K)$ 的元素称为 r-链.

设 K 中有 I_r 个 r-单纯形 $\sigma_{r,i}$ $(1 \leq i \leq I_r)$，则任意 $c \in C_r(K)$ 可表示为

$$c = \sum_{i=1}^{I_r} c_i\sigma_{r,i}, \quad c_i \in \mathbb{Z}. \tag{15}$$

因此 $C_r(K) \cong \mathbb{Z} \oplus \cdots \oplus \mathbb{Z}$（$I_r$ 个）.

定义 4.2 (边缘)**.** 设 $\sigma_r = (p_0 p_1 \dots p_r)$（$r > 0$）为有向 r-单纯形，其边缘 $\partial_r \sigma_r$ 定义为

$$\partial_r \sigma_r = \sum_{i=0}^{r} (-1)^i (p_0 p_1 \dots \hat{p}_i \dots p_r) \tag{16}$$

其中 $\hat{p}_i$ 表示省略 p_i. 对于 $r = 0$，定义 $\partial_0 \sigma_0 = 0$.

例如

$$\partial_2 (p_0 p_1 p_2) = (p_1 p_2) - (p_0 p_2) + (p_0 p_1) \tag{17}$$

$$\partial_3 (p_0 p_1 p_2 p_3) = (p_1 p_2 p_3) - (p_0 p_2 p_3) + (p_0 p_1 p_3) - (p_0 p_1 p_2) \tag{18}$$

∂_r 线性地作用于 $C_r(K)$ 上

$$\partial_r c = \sum_i c_i \partial_r \sigma_{r,i} \tag{19}$$

从而定义同态 $\partial_r : C_r(K) \to C_{r-1}(K)$. ∂_r 称为边缘算子.

定义 4.3 (r-闭链)**.** 若 $c \in C_r(K)$ 满足 $\partial_r c = 0$，则称 c 为 r-闭链. r-闭链全体 $Z_r(K) = \ker \partial_r$ 称为 r-闭链群.

定义 4.4 (r-边缘链)**.** 若存在 $d \in C_{r+1}(K)$ 使得 $c = \partial_{r+1} d$, 则称 c 为 r-边缘链. r-边缘链全体 $B_r(K) = \operatorname{im} \partial_{r+1}$ 称为 r-边缘链群.

引理 4.1. *复合映射 $\partial_r \circ \partial_{r+1} : C_{r+1}(K) \to C_{r-1}(K)$ 为零映射，即 $\partial_r(\partial_{r+1} c) = 0$ 对任意 $c \in C_{r+1}(K)$ 成立.*

证明. 只需对生成元验证. 若 $r = 0$，则 $\partial_0 \circ \partial_1 = 0$，因为 ∂_0 是零算子. 现假设 $r > 0$. 取 $\sigma = (p_0 \dots p_r p_{r+1}) \in C_{r+1}(K)$. 计算可得

$$\begin{aligned}
\partial_r(\partial_{r+1}\sigma) &= \partial_r \sum_{i=0}^{r+1} (-1)^i (p_0 \dots \hat{p}_i \dots p_{r+1}) \\
&= \sum_{i=0}^{r+1} (-1)^i \partial_r (p_0 \dots \hat{p}_i \dots p_{r+1}) \\
&= \sum_{i=0}^{r+1} (-1)^i \left(\sum_{j=0}^{i-1} (-1)^j (p_0 \dots \hat{p}_j \dots \hat{p}_i \dots p_{r+1}) \right. \\
&\qquad \left. + \sum_{j=i+1}^{r+1} (-1)^{j-1} (p_0 \dots \hat{p}_i \dots \hat{p}_j \dots p_{r+1}) \right) \\
&= \sum_{j<i} (-1)^{i+j} (p_0 \dots \hat{p}_j \dots \hat{p}_i \dots p_{r+1}) \\
&\qquad - \sum_{j>i} (-1)^{i+j} (p_0 \dots \hat{p}_i \dots \hat{p}_j \dots p_{r+1}) \\
&= 0
\end{aligned} \tag{20}$$

因此 $\partial_r(\partial_{r+1}\sigma) = 0$，引理得证. □

于是，我们有链复形

$$0 \xrightarrow{i} C_n(K) \xrightarrow{\partial_n} C_{n-1}(K) \xrightarrow{\partial_{n-1}} \cdots \xrightarrow{\partial_2} C_1(K) \xrightarrow{\partial_1} C_0(K) \xrightarrow{\partial_0} 0 \tag{21}$$

其中 $i : 0 \hookrightarrow C_n(K)$ 为嵌入映射,

由引理立即可得

$$B_r(K) \subset Z_r(K) \subset C_r(K) \tag{22}$$

几何上，r-闭链是没有边界的 r-维对象；r-边缘链是某个 $(r+1)$-维对象的边界.

4.3 同调群

定义 4.5 (同调群)**.** 设 K 为 n 维单纯复形. K 的 r-次同调群定义为

$$H_r(K) \equiv Z_r(K)/B_r(K), \quad 0 \le r \le n \tag{23}$$

若 $r > n$ 或 $r < 0$，定义 $H_r(K) = 0$.

$H_r(K)$ 中的元素是 r-闭链的等价类 $[z]$，称为同调类. 两个 r-闭链 z 和 z' 同调（记作 $z \sim z'$）当且仅当 $z - z' \in B_r(K)$，即它们相差一个边缘链.

定理 4.2. 同调群是拓扑不变量. 若 $X \cong Y$，则对任意三角剖分 (K, f) 和 (L, g)，有 $H_r(K) \cong H_r(L)$. 特别地，同一拓扑空间的不同三角剖分给出同构的同调群.

因此，对可三角剖分的拓扑空间 X，可定义 $H_r(X) \cong H_r(K)$.

例 4.1. 设 $K = \{p_0\}$（单个 0-单纯形），则

$$C_0(K) \cong \mathbb{Z}, \quad Z_0(K) = C_0(K), \quad B_0(K) = \{0\}, \tag{24}$$

故

$$H_0(K) \cong \mathbb{Z}. \tag{25}$$

例 4.2. 设 $K = \{p_0, p_1, (p_0p_1)\}$，即 K 是由两个顶点和连接它们的一条边组成的单纯复形.

0-链群和 1-链群分别为 $C_0(K) = \{ip_0 + jp_1 \mid i, j \in \mathbb{Z}\}$ 和 $C_1(K) = \{k(p_0p_1) \mid k \in \mathbb{Z}\}$. 由于 (p_0p_1) 不是 K 中任何单纯形的边缘（K 中没有 2-单纯形），$B_1(K) = \{0\}$，因此 $H_1(K) = \frac{Z_1(K)}{B_1(K)} = Z_1(K)$.

现在求 $Z_1(K)$. 设 $z = m(p_0p_1) \in Z_1(K)$，则需满足

$$\partial_1 z = m\partial_1(p_0p_1) = m(p_1 - p_0) = mp_1 - mp_0 = 0 \tag{26}$$

由于 p_0 和 p_1 是 $C_0(K)$ 中线性无关的生成元，必须有 $m = 0$. 因此 $Z_1(K) = \{0\}$ 从而 $H_1(K) = 0$.

对于 0-链，有 $Z_0(K) = C_0(K) = \{ip_0 + jp_1 \mid i, j \in \mathbb{Z}\}$，边缘链群 $B_0(K)$ 是 ∂_1 的像

$$B_0(K) = \operatorname{im} \partial_1 = \{l\partial_1(p_0p_1) \mid l \in \mathbb{Z}\} = \{l(p_1 - p_0) \mid l \in \mathbb{Z}\} \tag{27}$$

定义满同态 $f : Z_0(K) \to \mathbb{Z}$ 为

$$f(ip_0 + jp_1) = i + j \tag{28}$$

则核为

$$\ker f = f^{-1}(0) = \{ip_0 + jp_1 \mid i + j = 0\} = \{i(p_0 - p_1) \mid i \in \mathbb{Z}\} = B_0(K) \tag{29}$$

由同态基本定理，有

$$H_0(K) = \frac{Z_0(K)}{B_0(K)} \cong \mathbb{Z} \tag{30}$$

例 4.3. 设 $K = \{p_0, p_1, p_2, (p_0p_1), (p_1p_2), (p_2p_0)\}$，如图(4)所示. 这是圆周 S^1 的一个三角剖分（三个顶点和三条边组成一个三角形边界）.

由于 K 中没有 2-单纯形，$B_1(K) = 0$，故 $H_1(K) = Z_1(K)/B_1(K) = Z_1(K)$. 设 $z = i(p_0p_1) + j(p_1p_2) + k(p_2p_0) \in Z_1(K)$, 其中 $i, j, k \in \mathbb{Z}$. 则 $\partial_1 z = i(p_1 - p_0) + j(p_2 - p_1) + k(p_0 - p_2) = (k - i)p_0 + (i - j)p_1 + (j - k)p_2 = 0$. 由于 p_0, p_1, p_2 是 $C_0(K)$ 中线性无关的生成元，必须满足 $k - i = 0$，$i - j = 0$，$j - k = 0$，即 $i = j = k$. 因此 $Z_1(K) = \{i\{(p_0p_1) + (p_1p_2) + (p_2p_0)\} \mid i \in \mathbb{Z}\}$. 这表明 $Z_1(K) \cong \mathbb{Z}$，故

$$H_1(K) = Z_1(K) \cong \mathbb{Z} \tag{31}$$

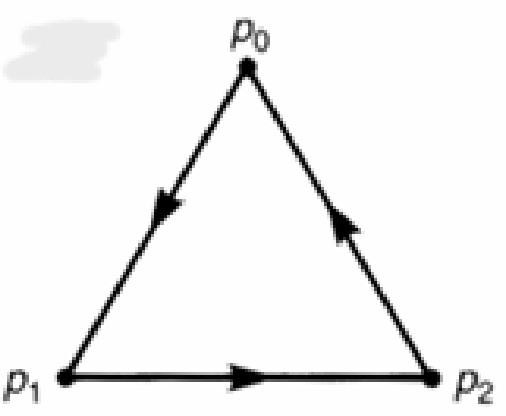


图 4: S^1 的三角剖分

对于 0-链，$Z_0(K) = C_0(K) = \{ip_0 + jp_1 + kp_2 \mid i, j, k \in \mathbb{Z}\}$. 边缘链群 $B_0(K)$ 是 ∂_1 的像，$B_0(K) = \{\partial_1[l(p_0p_1) + m(p_1p_2) + n(p_2p_0)] \mid l, m, n \in \mathbb{Z}\} = \{(n-l)p_0 + (l-m)p_1 + (m-n)p_2 \mid l, m, n \in \mathbb{Z}\}$. 定义满同态 $f : Z_0(K) \to \mathbb{Z}$ 为 $f(ip_0 + jp_1 + kp_2) = i + j + k$. 若 $ip_0 + jp_1 + kp_2 \in B_0(K)$，则存在 $l, m, n \in \mathbb{Z}$ 使得 $i = n - l$，$j = l - m$，$k = m - n$，于是 $i + j + k = 0$，故 $B_0(K) \subseteq \ker f$. 反之，若 $i + j + k = 0$，可取 $l = 0$，$m = -j$，$n = i$，有 $ip_0 + jp_1 + kp_2 = \partial_1[0 \cdot (p_0p_1) - j \cdot (p_1p_2) + i \cdot (p_2p_0)] \in B_0(K)$. 故 $\ker f \subseteq B_0(K)$. 因此 $\ker f = B_0(K)$. 由同态基本定理

$$H_0(K) = Z_0(K)/B_0(K) \cong \mathbb{Z} \tag{32}$$

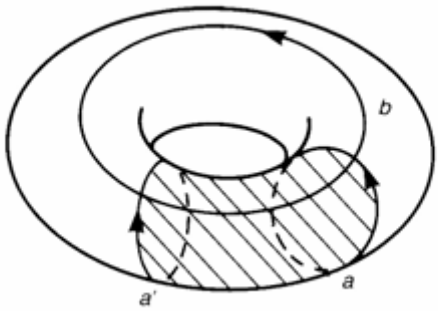


图 5: a 与 b 生成 $H_1(T^2)$

例 4.4. 这里我们用更加直观的方式考虑环面 T^2 的同调群，第 r 同调群由那些无边缘的 r-链生成，而这些 r-链本身不是某个 $(r+1)$-链的边缘.

环面表面没有边界，但它不是任何 3-链的边缘. 因此，$H_2(T^2)$ 由一个生成元（环面表面本身）自由生成

$$H_2(T^2) \cong \mathbb{Z} \tag{33}$$

图(5)中的环 a 和 b 没有边界，但它们不是任何 2-链的边缘. 考虑另一个环 a'，由于 $a' - a$ 围成图(5)中阴影部分的面积，a' 与 a 同调. 因此，$H_1(T^2)$ 由 a 和 b 自由生成

$$H_1(T^2) \cong \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \tag{34}$$

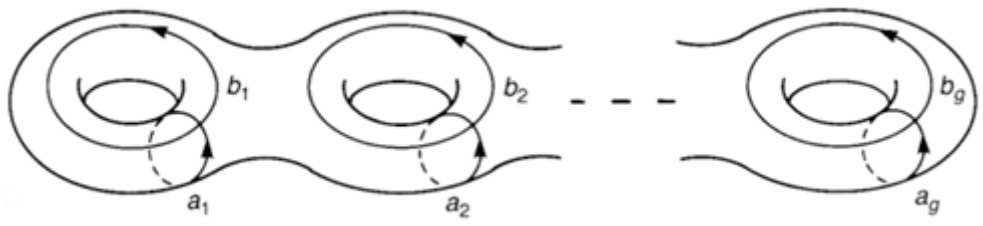


图 6: a_i 与 b_i（$1 \le i \le g$）生成 $H_1(\Sigma_g)$

由于 T^2 连通，$H_0(T^2) \cong \mathbb{Z}$.

上述分析可推广到亏格 g 的环面 Σ_g. 由于 Σ_g 无边界且没有 3-单纯形，曲面 Σ_g 本身自由生成 $H_2(\Sigma_g) \cong \mathbb{Z}$. 第 1 同调群 $H_1(\Sigma_g)$ 由那些不是某块面积边界的环生成. 图**(??)**给出了生成元的标准选取

$$H_1(\Sigma_g) = \{i_1[a_1] + j_1[b_1] + \cdots + i_g[a_g] + j_g[b_g]\} \cong \underbrace{\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \oplus \cdots \oplus \mathbb{Z}}_{2g} \tag{35}$$

由于 Σ_g 连通，$H_0(\Sigma_g) \cong \mathbb{Z}$. 这 $2g$ 条曲线 $\{a_i, b_i\}$ 称为 Σ_g 上的标准曲线系.

5 同调群的性质与 Betti 数

5.1 连通复形的第 0 同调群

定理 5.1. *设 K 为连通单纯复形，则*

$$H_0(K) \cong \mathbb{Z} \tag{36}$$

证明. 由于 K 连通，对任意两个 0-单纯形 p_i 和 p_j，存在一系列 1-单纯形使得

$$\partial_1((p_i p_k) + (p_k p_l) + \cdots + (p_m p_j)) = p_j - p_i \tag{37}$$

因此 p_i 与 p_j 同调，即 $[p_i] = [p_j]$. 故所有 0-单纯形都同调于同一个点 p_1.

设

$$z = \sum_{i=1}^{I_0} n_i p_i \in Z_0(K) \tag{38}$$

则

$$[z] = \left[\sum_i n_i p_i\right] = \sum_i n_i [p_i] = \sum_i n_i [p_1] \tag{39}$$

显然 $[z] = 0$（即 $z \in B_0(K)$）当且仅当 $\sum n_i = 0$.

另一方面，$B_0(K) = \operatorname{im} \partial_1$ 中的元素满足系数之和为零. 因此

$$z = \sum n_i p_i \in B_0(K) \iff \sum n_i = 0 \tag{40}$$

定义满同态 $f Z_0(K) \to \mathbb{Z}$ 为

$$f(n_1 p_1 + \cdots + n_{I_0} p_{I_0}) = \sum_{i=1}^{I_0} n_i \tag{41}$$

则 $\ker f = B_0(K)$，故

$$H_0(K) = Z_0(K)/B_0(K) \cong \mathbb{Z} \tag{42}$$

□

5.2 多连通分量的情形

定理 5.2. 设 K 为 N 个连通分量的不交并 $K = K_1 \cup K_2 \cup \cdots \cup K_N$ $(K_i \cap K_j = \emptyset)$，则

$$H_r(K) = H_r(K_1) \oplus H_r(K_2) \oplus \cdots \oplus H_r(K_N) \tag{43}$$

证明. 链群可分解为

$$C_r(K) = C_r(K_1) \oplus C_r(K_2) \oplus \cdots \oplus C_r(K_N) \tag{44}$$

这一分解同样适用于闭链群和边缘链群

$$Z_r(K) = \bigoplus_i Z_r(K_i), \qquad B_r(K) = \bigoplus_i B_r(K_i) \tag{45}$$

因此

$$H_r(K) = Z_r(K)/B_r(K) = \bigoplus_i \big(Z_r(K_i)/B_r(K_i)\big) = \bigoplus_i H_r(K_i) \tag{46}$$

□

推论. 设 K 为 N 个连通分量的不交并，则

$$H_0(K) \cong \underbrace{\mathbb{Z} \oplus \cdots \oplus \mathbb{Z}}_{N\text{个}} \tag{47}$$

特别地，$H_0(K) \cong \mathbb{Z}$ 当且仅当 K 连通.

5.3 同调群的扭群与 Betti 数

由于 $C_r(K)$ 是自由阿贝尔群，其子群 $Z_r(K)$ 和 $B_r(K)$ 也是自由阿贝尔群. 但 $H_r(K) = Z_r(K)/B_r(K)$ 不一定自由阿贝尔，其一般形式为

$$H_r(K) \cong \underbrace{\mathbb{Z} \oplus \cdots \oplus \mathbb{Z}}_{f\text{个}} \oplus \mathbb{Z}_{k_1} \oplus \cdots \oplus \mathbb{Z}_{k_p} \tag{48}$$

其中前 f 个因子构成自由阿贝尔部分，f 称为秩；后 p 个因子构成扭群.

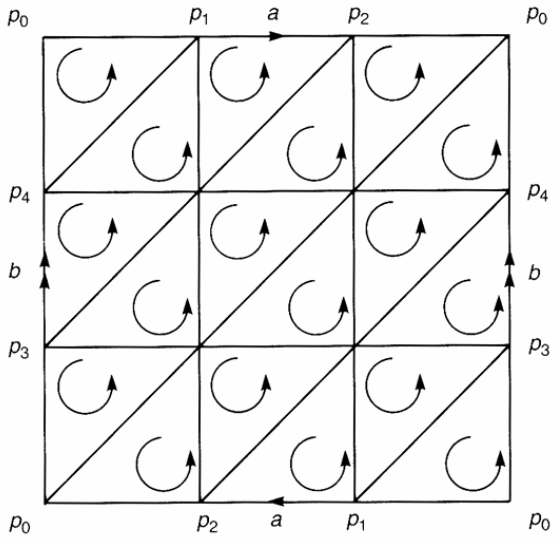


图 7: Klein 瓶的三角剖分

例 5.1. 图(7)给出了 Klein 瓶的一个三角剖分.

由于 $B_2(K)=0$, 有 $H_2(K)=Z_2(K)$. 设 $z\in Z_2(K)$. 若 z 是 K 中所有 2-单纯形的相同系数组合, 即 $z=\sum m\sigma_{2,i}$, 则内部的 1-单纯形相互抵消, 只剩下外部的 1-单纯形 $\partial_2 z=-2ma$, 其中 $a=(p_0p_1)+(p_1p_2)+(p_2p_0)$. 为使 $\partial_2 z=0$，必须有 $m=0$，故

$$H_2(K)=Z_2(K)\cong\{0\} \tag{49}$$

从环面的计算经验可知，每个 1-闭链都同调于 $ia+jb$（$i,j\in\mathbb{Z}$）. 对于一个 2-链，若其边界只由 a 和 b 组成，则 K 中所有 2-单纯形必须以相同系数相加. 因此，对于这样的 2-链 $z=\sum m\sigma_{2,i}$，有 $\partial z=2ma$. 这说明 $2ma\sim 0$. 因此，$H_1(K)$ 由两个闭链 a 和 b 生成，且满足 $2a=0$（即 a 的阶为 2），而 b 自由

$$H_1(K)=\{i[a]+j[b]\mid i,j\in\mathbb{Z}\}\cong\mathbb{Z}_2\oplus\mathbb{Z}. \tag{50}$$

由于 K 连通，$H_0(K)\cong\mathbb{Z}$.

扭群检测多面体中的“扭曲”结构. 若使用 $\mathbb{Z}_2$ 或 $\mathbb{R}$ 系数，则无法识别扭群. $\mathbb{Z}_2$ 无非平凡子群，故无法体现扭转；而 $\mathbb{R}/m\mathbb{R}\cong\{0\}$（$m\neq 0$），故 $\mathbb{R}$ 系数下扭转部分消失. 若 $H_r(K;\mathbb{Z})$ 如(48)所示，则

$$H_r(K;\mathbb{R})\cong\underbrace{\mathbb{R}\oplus\cdots\oplus\mathbb{R}}_{f\text{个}} \tag{51}$$

定义 5.1 (Betti 数)**.** 设 K 为单纯复形，第 r Betti 数定义为

$$b_r(K)\equiv\dim H_r(K;\mathbb{R}) \tag{52}$$

即 $b_r(K)$ 是 $H_r(K;\mathbb{Z})$ 中自由阿贝尔部分的秩.

例 5.2. 环面 T^2 的 $b_0=1,\ b_1=2,\ b_2=1$，球面 S^2 的 $b_0=1,\ b_1=0,\ b_2=1$.

定理 5.3 (Euler-Poincaré 定理)**.** *设 K 为 n 维单纯复形，I_r 为 K 中 r-单纯形的个数，则*

$$\chi(K)\equiv\sum_{r=0}^{n}(-1)^r I_r=\sum_{r=0}^{n}(-1)^r b_r(K) \tag{53}$$

证明. 考虑边界同态 $\partial_r C_r(K;\mathbb{R})\to C_{r-1}(K;\mathbb{R})$. 由线性代数有

$$I_r=\dim C_r(K;\mathbb{R})=\dim(\ker\partial_r)+\dim(\operatorname{im}\partial_r)=\dim Z_r(K;\mathbb{R})+\dim B_{r-1}(K;\mathbb{R}) \tag{54}$$

其中 $B_{-1}(K)$ 定义为零空间. 又

$$b_r(K)=\dim H_r(K;\mathbb{R})=\dim Z_r(K;\mathbb{R})-\dim B_r(K;\mathbb{R}) \tag{55}$$

代入得

$$\chi(K)=\sum_{r=0}^{n}(-1)^r I_r=\sum_{r=0}^{n}(-1)^r\big(\dim Z_r(K;\mathbb{R})+\dim B_{r-1}(K;\mathbb{R})\big)=\sum_{r=0}^{n}(-1)^r b_r(K) \tag{56}$$

□

由于 Betti 数是拓扑不变量, Euler 示性数 $\chi(K)$ 也是拓扑不变量, 因此可对拓扑空间 X 定义 $\chi(X)=\chi(K)$（其中 K 为 X 的任意三角剖分）.