共形场与算符乘积展开

呜哩天才琪露诺

华中科技大学物理学院

日期：2026 年 10 月 31 日，万圣夜

1 共形群

1.1 共形不变性

考虑平坦度规 $g_{\mu\nu}=\eta_{\mu\nu}$，号差为 (p,q) 的空间 $\mathbb{R}^d$，其线元为 $\mathrm{d}s^2=g_{\mu\nu}\mathrm{d}x^\mu\mathrm{d}x^\nu$. 在坐标变换 $x\to x'$ 下，我们有

$$g_{\mu\nu}\to g'_{\mu\nu}(x')=\frac{\partial x^\alpha}{\partial x'^\mu}\frac{\partial x^\beta}{\partial x'^\nu}g_{\alpha\beta}(x) \tag{1}$$

共形群是坐标变换群的一个子群，它使度规在标度变换下保持不变，即

$$g_{\mu\nu}(x)\to g'_{\mu\nu}(x')=\Omega(x)g_{\mu\nu}(x) \tag{2}$$

因此，这些坐标变换保持两个向量 v,w 之间的夹角 $\frac{v\cdot w}{(v^2w^2)^{1/2}}$ 不变，其中 $v\cdot w=g_{\mu\nu}v^\mu w^\nu$. Poincaré 群是共形群的子群，因为它使得度规保持不变（$g'_{\mu\nu}=g_{\mu\nu}$）.

考虑无穷小坐标变换 $x^\mu\to x^\mu+\epsilon^\mu$，则

$$\eta_{\mu\nu}\to\eta_{\mu\nu}+(\partial_\mu\epsilon_\nu+\partial_\nu\epsilon_\mu) \tag{3}$$

我们需要 $\partial_\mu\epsilon_\nu+\partial_\nu\epsilon_\mu$ 正比于 $\eta_{\mu\nu}$，通过用 $\eta^{\mu\nu}$ 缩并两边来确定比例常数，得到

$$\partial_\mu\epsilon_\nu+\partial_\nu\epsilon_\mu=\frac{2}{d}(\partial\cdot\epsilon)\eta_{\mu\nu} \tag{4}$$

及 $\Omega(x)=1+\frac{2}{d}(\partial\cdot\epsilon)$.

现在我们来推导两个稍后会用到的方程. 首先，我们对式 (4) 作用 ∂^ν 得到

$$\begin{aligned}\partial^\nu\left(\partial_\mu\epsilon_\nu+\partial_\nu\epsilon_\mu\right)&=\frac{2}{d}\partial^\nu(\partial\cdot\epsilon)\eta_{\mu\nu}\\ \partial_\mu(\partial\cdot\epsilon)+\Box\epsilon_\mu&=\frac{2}{d}\partial_\mu(\partial\cdot\epsilon)\end{aligned} \tag{5}$$

进一步，我们对上式作用 ∂_ν 得到

$$\partial_\mu\partial_\nu(\partial\cdot\epsilon)+\Box\partial_\nu\epsilon_\mu=\frac{2}{d}\partial_\mu\partial_\nu(\partial\cdot\epsilon). \tag{6}$$

交换 $\mu\leftrightarrow\nu$ 后，将所得表达式加到式 (6) 中并使用式 (4)，我们得到

$$\begin{aligned}&2\partial_\mu\partial_\nu(\partial\cdot\epsilon)+\Box\left(\frac{2}{d}(\partial\cdot\epsilon)\eta_{\mu\nu}\right)=\frac{4}{d}\partial_\mu\partial_\nu(\partial\cdot\epsilon),\\ \Longrightarrow\ &\left(\eta_{\mu\nu}\Box+(d-2)\partial_\mu\partial_\nu\right)(\partial\cdot\epsilon)=0.\end{aligned} \tag{7}$$

最后，用 $\eta^{\mu\nu}$ 缩并该方程给出

$$(d-1)\Box(\partial\cdot\epsilon)=0. \tag{8}$$

对式 (4) 求导数 ∂_ρ 并置换指标，得到

$$\begin{aligned}\partial_\rho\partial_\mu\epsilon_\nu+\partial_\rho\partial_\nu\epsilon_\mu&=\frac{2}{d}\eta_{\mu\nu}\partial_\rho(\partial\cdot\epsilon),\\ \partial_\nu\partial_\rho\epsilon_\mu+\partial_\mu\partial_\rho\epsilon_\nu&=\frac{2}{d}\eta_{\rho\mu}\partial_\nu(\partial\cdot\epsilon),\\ \partial_\mu\partial_\nu\epsilon_\rho+\partial_\nu\partial_\mu\epsilon_\rho&=\frac{2}{d}\eta_{\nu\rho}\partial_\mu(\partial\cdot\epsilon).\end{aligned}\tag{9}$$

从后两行之和中减去第一行，得

$$2\partial_\mu\partial_\nu\epsilon_\rho=\frac{2}{d}\left(-\eta_{\mu\nu}\partial_\rho+\eta_{\rho\mu}\partial_\nu+\eta_{\nu\rho}\partial_\mu\right)(\partial\cdot\epsilon).\tag{10}$$

1.2 $d\geq 3$ 的共形变换与生成元

我们注意到，式 (8) 意味着 $\partial\cdot\epsilon$ 至多是 x^μ 的线性函数，即 $\partial\cdot\epsilon=A+B_\mu x^\mu$，其中 A 和 B_μ 为常数. 由此可推出 ϵ_μ 至多是 x^ν 的二次函数，因此我们可以假设

$$\epsilon_\mu=a_\mu+b_{\mu\nu}x^\nu+c_{\mu\nu\rho}x^\nu x^\rho,\tag{11}$$

其中 $a_\mu,b_{\mu\nu},c_{\mu\nu\rho}\ll 1$ 为常数，且 $c_{\mu\nu\rho}=c_{\mu\rho\nu}$. 我们独立研究 (11) 中的各项.

- 式 (11) 中的常数项 a_μ 不受式 (4) 的限制. 它描述无穷小平移 $x'^\mu=x^\mu+a^\mu$，对应的生成元为动量算符 $P_\mu=-\mathrm{i}\partial_\mu$.
- 为了研究式 (11) 中关于 x 线性的项，我们将其代入 (4) 中得到：

  $$b_{\nu\mu}+b_{\mu\nu}=\frac{2}{d}(\eta^{\rho\sigma}b_{\rho\sigma})\eta_{\mu\nu}\tag{12}$$

  从这个表达式可以看出，$b_{\mu\nu}$ 的对称部分是正比于 $\eta_{\mu\nu}$ 的，即

  $$b_{\mu\nu}=\alpha\eta_{\mu\nu}+m_{\mu\nu}\tag{13}$$

  其中 $m_{\mu\nu}=-m_{\nu\mu}$. 对称部分 $\alpha\eta_{\mu\nu}$ 描述无穷小标度变换 $x'^\mu=(1+\alpha)x^\mu$，对应的生成元为 $D=-\mathrm{i}x^\mu\partial_\mu$. 反对称部分 $m_{\mu\nu}$ 对应于无穷小旋转 $x'^\mu=(\delta^\mu_\nu+m^\mu{}_\nu)x^\nu$，其生成元为角动量算符 $L_{\mu\nu}=\mathrm{i}(x_\mu\partial_\nu-x_\nu\partial_\mu)$
- 式 (11) 中关于 x 二次的项可以通过将式 (11) 代入表达式 (10) 来研究. 计算得到

  $$\partial_\nu(\partial\cdot\epsilon)=2c^\mu{}_{\mu\nu}\tag{14}$$

  由此我们得到

  $$c_{\mu\nu\rho}=\eta_{\mu\rho}b_\nu+\eta_{\mu\nu}b_\rho-\eta_{\nu\rho}b_\mu\quad\text{其中}\quad b_\mu=\frac{1}{d}c^\rho{}_{\rho\mu}\tag{15}$$

  由此产生的变换被称为**特殊共形变换** (SCT)，其无穷小形式为

  $$x'^\mu=x^\mu+2(x\cdot b)x^\mu-(x\cdot x)b^\mu.\tag{16}$$

  对应的生成元写为 $K_\mu=-\mathrm{i}\left(2x_\mu x^\nu\partial_\nu-(x\cdot x)\partial_\mu\right)$.

至此我们已经确定了无穷小共形变换. 有限共形变换连同相应的生成元总结在(1)中. 对于(1)中显示的有限特殊共形变换，我们可以通过对分母关于小量 b^μ 展开来验证表达式 (16) 是其无穷小版本. SCT 的标度因子为

$$\Lambda(x)=\left[1-2(b\cdot x)+(b\cdot b)(x\cdot x)\right]^2\tag{17}$$

对于有限特殊共形变换，可以重写为

$$\frac{x'^\mu}{x'\cdot x'}=\frac{x^\mu}{x\cdot x}-b^\mu\tag{18}$$

由此看出，SCT 可以理解为先做一次 x^μ 的反演，随后进行 b^μ 的平移，然后再进行一次反演. 最后，我们观

表 1: 有限共形变换及对应的生成元

变换		生成元
平移	$x'^{\mu} = x^{\mu} + a^{\mu}$	$P_{\mu} = -\mathrm{i}\partial_{\mu}$
标度变换	$x'^{\mu} = \alpha x^{\mu}$	$D = -\mathrm{i}x^{\mu}\partial_{\mu}$
旋转	$x'^{\mu} = M^{\mu}{}_{\nu}x^{\nu}$	$L_{\mu\nu} = \mathrm{i}(x_{\mu}\partial_{\nu} - x_{\nu}\partial_{\mu})$
特殊共形变换 (SCT)	$x'^{\mu} = \dfrac{x^{\mu} - (x\cdot x)b^{\mu}}{1 - 2(b\cdot x) + (b\cdot b)(x\cdot x)}$	$K_{\mu} = -\mathrm{i}(2x_{\mu}x^{\nu}\partial_{\nu} - (x\cdot x)\partial_{\mu})$

察到有限特殊共形变换并非全局定义的. 特别地，对于给定的非零矢量 b^{μ}，存在一个点 $x^{\mu} = \frac{1}{b\cdot b}b^{\mu}$，使得

$$1 - 2(b\cdot x) + (b\cdot b)(x\cdot x) = 0. \tag{19}$$

x^{μ} 被映射到无穷远. 因此，为了全局定义有限共形变换，我们还需要考虑共形紧化.

让我们来确定维度 $d \geq 3$ 的共形代数. 可以通过计算生成元的总数来确定代数的维度. 考虑到 $L_{\mu\nu}$ 是反对称的，生成元数目为 $N = d + 1 + \frac{d(d-1)}{2} + d = \frac{(d+2)(d+1)}{2}$. 定义

$$\begin{aligned} J_{\mu,\nu} &= L_{\mu\nu}, \quad J_{-1,\mu} = \frac{1}{2}(P_{\mu} - K_{\mu}), \\ J_{-1,0} &= D, \qquad J_{0,\mu} = \frac{1}{2}(P_{\mu} + K_{\mu}). \end{aligned} \tag{20}$$

其中 $\mu,\nu = 1,\cdots,d$ 为空间指标，$0,-1$ 为额外指标. 可以验证，指标 $m,n = -1,0,1,\ldots,d$ 的 $J_{m,n}$ 满足以下对易关系

$$[J_{mn}, J_{rs}] = \mathrm{i}(\eta_{ms}J_{nr} + \eta_{nr}J_{ms} - \eta_{mr}J_{ns} - \eta_{ns}J_{mr}). \tag{21}$$

对不同号差的空间，度规 $\eta_{\mu\nu}$ 是不同的，对应的 Lie 代数也不同. 对于 d 维 Eculid 空间 $\mathbb{R}^{d,0}$，度规为 $\eta_{mn} = \mathrm{diag}(-1,1,\ldots,1)$，因此我们将式 (21) 对应 Lie 代数 $\mathrm{so}(d+1,1)$. 同样地，对 Minkowski 空间 $\mathbb{R}^{d-1,1}$ ，度规为 $\eta_{mn} = \mathrm{diag}(-1,-1,1,\ldots,1)$，(21) 对应 Lie 代数 $\mathrm{so}(d,2)$. 普遍地

对于 $d = p + q \geq 3$ 的情况，$\mathbb{R}^{p,q}$ 的共形群是 $\mathrm{SO}(p+1,q+1)$

2 二维共形变换

在二维情况下，无穷小共形变换下不变性的条件 (4) 可写为

$$\partial_0\epsilon_0 = +\partial_1\epsilon_1, \qquad \partial_0\epsilon_1 = -\partial_1\epsilon_0 \tag{22}$$

这就是复分析中的 Cauchy-Riemann 方程. 引入复变量

$$\begin{aligned} z &= x^0 + \mathrm{i}x^1, \qquad \epsilon = \epsilon^0 + \mathrm{i}\epsilon^1, \qquad \partial_z = \frac{1}{2}(\partial_0 - \mathrm{i}\partial_1), \\ \overline{z} &= x^0 - \mathrm{i}x^1, \qquad \overline{\epsilon} = \epsilon^0 - \mathrm{i}\epsilon^1, \qquad \partial_{\overline{z}} = \frac{1}{2}(\partial_0 + \mathrm{i}\partial_1). \end{aligned} \tag{23}$$

则 $\epsilon(z)$ 是（某个开集内的）全纯函数，进而全纯函数 $f(z) = z + \epsilon(z)$ 给出二维无穷小共形变换 $z \mapsto f(z)$. 度规张量在 $z \mapsto f(z)$ 下的变换如下

$$\mathrm{d}s^2 = \mathrm{d}z\mathrm{d}\overline{z} \quad \mapsto \quad \frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial \overline{f}}{\partial \overline{z}}\mathrm{d}z\mathrm{d}\overline{z} \tag{24}$$

标度因子为 $\left|\frac{\partial f}{\partial z}\right|^2$.

2.1 Witt 代数

假设 $\epsilon(z)$ 是有孤立奇点的亚纯函数，在某个包含 0 的开集内解析，在 $z=0$ 附近对 $\epsilon(z)$ 进行 Laurent 展开. 一般的无穷小共形变换可以写成

$$\begin{aligned} z' &= z+\epsilon(z) = z+\sum_{n\in\mathbb{Z}} \epsilon_n(-z^{n+1}), \\ \overline{z}' &= \overline{z}+\overline{\epsilon}(\overline{z}) = \overline{z}+\sum_{n\in\mathbb{Z}} \overline{\epsilon}_n(-\overline{z}^{n+1}) \end{aligned} \tag{25}$$

其中无穷小参数 ϵ_n 和 $\overline{\epsilon}_n$ 是常数. 对应于特定 n 的变换的生成元为

$$l_n = -z^{n+1}\partial_z \qquad \text{and} \qquad \bar{l}_n = -\overline{z}^{n+1}\partial_{\overline{z}}. \tag{26}$$

计算得到

$$\begin{aligned} [l_m, l_n] &= z^{m+1}\partial_z(z^{n+1}\partial_z) - z^{n+1}\partial_z(z^{m+1}\partial_z) \\ &= (n+1)z^{m+n+1}\partial_z - (m+1)z^{m+n+1}\partial_z \\ &= (m-n)l_{m+n}, \\ [\bar{l}_m, \bar{l}_n] &= (m-n)\bar{l}_{m+n}, \\ [l_m, \bar{l}_n] &= 0 \end{aligned} \tag{27}$$

我们称 $[l_m, l_n] = (m-n)l_{m+n}$ 为 Witt 代数，则二维 Eculid 空间中无穷小共形变换的代数是两个彼此对易的 Witt 代数，因而是无限维的.

2.2 共形群

在 Riemann 球面 $S^2 \simeq \mathbb{C}\cup\{\infty\}$ 上，并非所有生成元 (26)都是良定义的. 对于 $z=0$，有

$$l_n = -z^{n+1}\partial_z \quad \text{仅在} n \geq -1 \text{ 时在} z=0 \text{ 处非奇异} \tag{28}$$

对 $z=\infty$，进行变量代换 $z=-1/w$ 并研究 $w\to 0$. 然后我们观察到

$$l_n = -\left(-\frac{1}{w}\right)^{n-1}\partial_w \quad \text{仅在} n \leq 1 \text{ 时在} w=0 \text{ 处非奇异} \tag{29}$$

这里我们利用了 $\partial_z = (-w)^2\partial_w$. 因此，Riemann 球面 $S^2 = \mathbb{C}\cup\{\infty\}$ 上的全局定义共形变换由 $\{l_{-1}, l_0, l_{+1}\}$ 生成.

现在来确定共形群. 从定义可以清楚地看出，算符 l_{-1} 生成平移变换 $z\mapsto z+b$. 因为 $l_0 = -z\partial_z$，所以 l_0 生成变换 $z\mapsto az$，其中 $a\in\mathbb{C}$. 为了获得此类变换的几何直观，我们作变量代换 $z=re^{\mathrm{i}\phi}$，得到

$$l_0 = -\frac{1}{2}r\partial_r + \frac{\mathrm{i}}{2}\partial_\phi \qquad \bar{l}_0 = -\frac{1}{2}r\partial_r - \frac{\mathrm{i}}{2}\partial_\phi \tag{30}$$

由此，我们可以构造线性组合

$$l_0 + \bar{l}_0 = -r\partial_r \qquad \text{以及} \qquad \mathrm{i}(l_0 - \bar{l}_0) = -\partial_\phi \tag{31}$$

因此我们可以看到 $l_0+\bar{l}_0$ 是二维标度变换的生成元，而 $\mathrm{i}(l_0-\bar{l}_0)$ 是旋转的生成元. 最后，算符 l_{+1} 对应于特殊共形变换（SCT），即关于变量 $w=\frac{1}{z}$ 的平移. 事实上，$cl_1 z = -cz^2$ 是变换 $z\mapsto \frac{z}{cz+1}$ 的无穷小版本，它对应于 $w\mapsto w-c$.

总之，我们已经论证了算符 $\{l_{-1}, l_0, l_{+1}\}$ 生成形式如下的变换

$$z\mapsto \frac{az+b}{cz+d} \qquad \text{其中} \quad a,b,c,d\in\mathbb{C} \tag{32}$$

为了使这个变换可逆，必须有 $ad-bc\neq 0$. 我们可以缩放常数 a,b,c,d 使得 $ad-bc=1$. 此外，注意到该表

达式在变换 $(a,b,c,d)\mapsto(-a,-b,-c,-d)$ 下是不变的. 故，Riemann 球面 $S^2=\mathbb{C}\cup\infty$ 的共形群是 Möbius 群 $\mathrm{SL}(2,\mathbb{C})/\mathbb{Z}_2$.

2.3 Virasoro 代数

我们定义 Lie 代数 $\mathfrak{g}$ 的中心扩展 $\hat{\mathfrak{g}}$ 为 Lie 代数 $\mathfrak{g}\oplus\mathbb{C}$. 取 $\mathbb{C}$ 的基为 c，对 $\tilde{x}\in\hat{\mathfrak{g}}$，有 $\tilde{x}=x+\alpha c$. 定义 $\hat{\mathfrak{g}}$ 上的 Lie 括号

$$[\tilde{x},\tilde{y}]_{\hat{\mathfrak{g}}}=[x,y]_{\mathfrak{g}}+cp(x,y) \tag{33}$$

其中 $p:\mathfrak{g}\times\mathfrak{g}\to\mathbb{C}$ 是双线性的. 由此可得

$$[\tilde{x},c]_{\hat{\mathfrak{g}}}=0 \tag{34}$$

$$[c,c]_{\hat{\mathfrak{g}}}=0 \tag{35}$$

我们将 Witt 代数的中心扩展的元素记为 L_n，其中 $n\in\mathbb{Z}$，对易关系为

$$[L_m,L_n]=(m-n)L_{m+n}+cp(m,n) \tag{36}$$

当然，对于生成元 $\bar{l}_n\leftrightarrow\overline{L}_n$ 也可以进行类似的分析.

$p(m,n)$ 的具体形式可以通过以下方式确定. 首先，从式 (36) 可以看出，为了使 $p(m,n)$ 与 Lie 括号的反对称性相容，必须有 $p(m,n)=-p(n,m)$. 令

$$\begin{aligned}\tilde{L}_n&=L_n+\frac{cp(n,0)}{n}\qquad\text{对于}n\neq0\\ \tilde{L}_0&=L_0+\frac{cp(1,-1)}{2}\end{aligned} \tag{37}$$

则

$$[\tilde{L}_n,\tilde{L}_0]=nL_n+cp(n,0)=n\tilde{L}_n \tag{38}$$

$$[\tilde{L}_1,\tilde{L}_{-1}]=2L_0+cp(1,-1)=2\tilde{L}_0 \tag{39}$$

重定义 $L_n\to\tilde{L}_n$，则 $p(n,0)=p(1,-1)=0$. 接下来，由 Jacobi 恒等式

$$\begin{aligned}0&=[[L_m,L_n],L_0]+[[L_n,L_0],L_m]+[[L_0,L_m],L_n]\\&=(m-n)cp(m+n,0)+ncp(n,m)-mcp(m,n)\\&=(m+n)p(n,m)\end{aligned} \tag{40}$$

可知，在 $n\neq-m$ 时，有 $p(n,m)=0$. 因此，唯一非零的中心扩展为 $p(n,-n)$ 对 $|n|\geq2$. 最后，由 Jacobi 恒等式

$$\begin{aligned}0&=[[L_{n-1},L_{n+1}],L_1]+[[L_{n+1},L_1],L_{n-1}]+[[L_1,L_{n-1}],L_{n+1}]\\&=(-2n+2)cp(1,-1)+(n+1)cp(n-1,-n+1)+(n-2)cp(-n,n)\end{aligned} \tag{41}$$

得到递推关系

$$\begin{aligned}p(n,-n)&=\frac{n+1}{n-2}p(n-1,-n+1)\\&=\frac{1}{2}\binom{n+1}{3}=\frac{1}{12}(n+1)n(n-1)\end{aligned} \tag{42}$$

这里我们取归一化 $p(2,-2)=\frac{1}{2}$. Witt 代数的中心扩展称为 Virasoro 代数，常数 c 称为中心荷. 中心荷为 c 的 Virasoro 代数 Vir 具有以下对易关系

$$[L_m,L_n]=(m-n)L_{m+n}+\frac{c}{12}(m^3-m)\delta_{m+n,0} \tag{43}$$

3 初级场

先前我们考虑的都是时空变换，下面我们引入场.

3.1 初级场及其无穷小共形变换

我们先前引入了复变量 $z = x^0 + \mathrm{i}x^1$ 和 $\overline{z} = x^0 - \mathrm{i}x^1$，场的自变量也要随之变化

$$\phi(x^0, x^1) \quad \longrightarrow \quad \phi(z, \overline{z}) \tag{44}$$

一般我们视 z 和 $\overline{z}$ 为独立变量，但有些时候我们把 $\overline{z}$ 看作 z 的复共轭.

仅依赖于 z 的场，即 $\phi(z)$，被称为手征场；仅依赖于 $\overline{z}$ 的场 $\phi(\overline{z})$ 被称为反手征场.

如果场 $\phi(z, \overline{z})$ 在缩放变换 $z \mapsto \lambda z$ 下按以下方式变换

$$\phi(z, \overline{z}) \mapsto \phi'(z, \overline{z}) = \lambda^h \overline{\lambda}^{\overline{h}} \phi(\lambda z, \overline{\lambda}\overline{z}) \tag{45}$$

则称其具有共形维度 $(h, \overline{h})$.

如果场在共形变换 $z \mapsto f(z)$ 下按以下方式变换

$$\phi(z, \overline{z}) \mapsto \phi'(z, \overline{z}) = \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)^h \left(\frac{\partial \overline{f}}{\partial \overline{z}}\right)^{\overline{h}} \phi(f(z), \overline{f}(\overline{z})) \tag{46}$$

则称其为共形维度为 $(h, \overline{h})$ 的初级场. 如果式 (46) 仅对 $f \in \mathrm{SL}(2, \mathbb{C})$ 成立，即仅对全局共形变换成立，那么 ϕ 被称为准初级场. 初级场总是准初级场，但反之则不然. 共形场论还有不是初级场或准初级场的场，称为次级场.

现在让我们研究初级场 $\phi(z, \overline{z})$ 在无穷小共形变换下的行为. 为此，我们考虑映射 $f(z) = z + \epsilon(z)$，其中 $\epsilon(z) \ll 1$，并在 $\epsilon(z)$ 的一阶近似下计算以下量

$$\left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)^h = 1 + h\partial_z \epsilon(z) + \mathcal{O}(\epsilon^2) \tag{47}$$

$$\phi(z + \epsilon(z), \overline{z}) = \phi(z, \overline{z}) + \epsilon(z)\partial_z \phi(z, \overline{z}) + \mathcal{O}(\epsilon^2) \tag{48}$$

共轭变换对应的量类似. 代入 (46)，我们得到

$$\phi(z, \overline{z}) \mapsto \phi'(z, \overline{z}) = \left(h\partial_z \epsilon + \epsilon\partial_z + \overline{h}\partial_{\overline{z}}\overline{\epsilon} + \overline{\epsilon}\partial_{\overline{z}}\right)\phi(z, \overline{z}) \tag{49}$$

因此，初级场在无穷小共形变换下的变换为

$$\delta_{\epsilon, \overline{\epsilon}} \phi(z, \overline{z}) = \left(h\partial_z \epsilon + \epsilon\partial_z + \overline{h}\partial_{\overline{z}}\overline{\epsilon} + \overline{\epsilon}\partial_{\overline{z}}\right)\phi(z, \overline{z}) \tag{50}$$

3.2 能量动量张量

通常，场论是通过 Lagrange 量来定义的，从中可以推导出理论的各种对象和性质. 特别地，能量-动量张量可以从作用量对度规的变分中推导出来，因此它描述了理论在无穷小变换 $g_{\mu\nu} \to g_{\mu\nu} + \delta g_{\mu\nu}$ 下的行为. 二维空间中无穷小共形变换的代数是无限维的，这对共形场论施加了极强的约束. 特别地，我们可以在不知道作用量显式形式的情况下研究这样的理论. 唯一需要的信息是其在共形变换下的行为，而这已编码在能量-动量张量中.

根据 Noether 定理，对于共形对称性 $x^\mu \mapsto x^\mu + \epsilon^\mu(x)$，我们有守恒流

$$j_\mu = T_{\mu\nu}\epsilon^\nu \tag{51}$$

其中能量-动量张量 $T_{\mu\nu}$ 是对称的. 取 $\epsilon^\mu = \mathrm{const}$，我们得到

$$0 = \partial^\mu j_\mu = \partial^\mu \left(T_{\mu\nu}\epsilon^\nu\right) = \left(\partial^\mu T_{\mu\nu}\right)\epsilon^\nu \quad \Longrightarrow \quad \partial^\mu T_{\mu\nu} = 0 \tag{52}$$

对于一般的变换 $\epsilon^\mu(x)$，流 (51) 的守恒意味着

$$\begin{aligned} 0 = \partial^\mu j_\mu &= \partial^\mu(T_{\mu\nu}\epsilon^\nu) + T_{\mu\nu}(\partial^\mu\epsilon^\nu) \\ &= 0 + \frac{1}{2}T_{\mu\nu}(\partial^\mu\epsilon^\nu + \partial^\nu\epsilon^\mu) = \frac{1}{2}T_{\mu\nu}\eta^{\mu\nu}(\partial\cdot\epsilon)\frac{2}{d} = \frac{1}{d}T^\mu{}_\mu(\partial\cdot\epsilon) \end{aligned} \tag{53}$$

这里我们使用了式 (4) 以及 $T_{\mu\nu}$ 对称这一事实. 由于该方程必须对任意的无穷小变换 $\epsilon(z)$ 成立，在共形场论中，能量-动量张量 $T_{\mu\nu}$ 是无迹的，即 $T^\mu{}_\mu = 0$.

取 $\eta_{\mu\nu} = \mathrm{diag}(+1,+1)$，从而 $T_{00} + T_{11} = T^\mu{}_\mu = 0$. 利用张量的变换法则 $T_{\mu\nu} = \frac{\partial x'^\alpha}{\partial x^\mu}\frac{\partial x'^\beta}{\partial x^\nu}T_{\alpha\beta}$，对于 $x'^0 = \frac{1}{2}(z+\overline{z})$ 和 $x'^1 = \frac{1}{2\mathrm{i}}(z-\overline{z})$，我们得到

$$\begin{aligned} T_{zz} &= \frac{1}{4}(T_{00} - 2\mathrm{i}T_{10} - T_{11}) = \frac{1}{2}(T_{00} - \mathrm{i}T_{10}) \\ T_{\overline{z}\overline{z}} &= \frac{1}{4}(T_{00} + 2\mathrm{i}T_{10} - T_{11}) = \frac{1}{2}(T_{00} + \mathrm{i}T_{10}) \\ T_{z\overline{z}} &= T_{\overline{z}z} = \frac{1}{4}(T_{00} + T_{11}) = 0 \end{aligned} \tag{54}$$

利用平移不变性的条件 (52)，我们得到

$$\partial_0 T_{00} + \partial_1 T_{10} = 0, \qquad \partial_0 T_{01} + \partial_1 T_{11} = 0 \tag{55}$$

由此可得

$$\partial_{\overline{z}} T_{zz} = \frac{1}{4}(\partial_0 + \mathrm{i}\partial_1)(T_{00} - \mathrm{i}T_{10}) = \frac{1}{4}\Big[\underbrace{\partial_0 T_{00} + \partial_1 T_{10}}_{=0} + \mathrm{i}(\underbrace{\partial_1 T_{00} - \partial_0 T_{10}}_{=0})\Big] = 0 \tag{56}$$

类似地，可以证明 $\partial_z T_{\overline{z}\overline{z}} = 0$. 由此可知能量-动量张量的两个非零分量分别是一个手征场和一个反手征场，即

$$T_{zz}(z,\overline{z}) =: T(z) \qquad T_{\overline{z}\overline{z}}(z,\overline{z}) =: \overline{T}(\overline{z}) \tag{57}$$

4 径向量子化

4.1 定义与模式展开

将 Eculid 时间方向记为 x^0，空间方向记为 x^1. 具有 Lorentz 号差的理论可以通过 Wick 旋转 $x^0 \to \mathrm{i}x^0$ 得到. 我们将 Eculid 空间方向 x^1 紧致化在一个半径为 $R = 1$ 的圆上. 以这种方式得到的 CFT 定义在一个无限长的圆柱面上，为此我们引入复坐标 w，定义为

$$w = x^0 + \mathrm{i}x^1 \qquad w \sim w + 2\pi\mathrm{i} \tag{58}$$

然后，我们将圆柱面映射到复平面，取变量代换

$$z = e^w = e^{x^0}\cdot e^{\mathrm{i}x^1} \tag{59}$$

时间平移 $x^0 \mapsto x^0 + a$ 被映射为复伸缩 $z \mapsto e^a z$，而空间平移 $x^1 \mapsto x^1 + b$ 被映射为旋转 $z \mapsto e^{\mathrm{i}b}z$. 时间平移的生成元是哈密顿量，在当前情况下对应于伸缩算符. 类似地，空间平移的生成元是动量算符，对应于旋转. 回顾式 (31) 以及 L_0 和 $\overline{L}_0$ 的中心扩展，我们发现

$$H = L_0 + \overline{L}_0 \qquad P = \mathrm{i}(L_0 - \overline{L}_0) \tag{60}$$

在二维平面上，共形权重为 $(h,\overline{h})$ 的初级场 $\phi(z,\overline{z})$ 的 Laurent 展开式为

$$\phi(z,\overline{z}) = \sum_{n,\overline{m}\in\mathbb{Z}} z^{-n-h}\overline{z}^{-\overline{m}-\overline{h}}\phi_{n,\overline{m}} \tag{61}$$

当我们通过共形映射 (59)进行坐标变换时，场会按照张量密度的规则发生改变. Jacobi 因子 $\left(\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}w}\right)^h\left(\frac{\mathrm{d}\overline{z}}{\mathrm{d}\overline{w}}\right)^{\overline{h}} =$

$z^h\overline{z}^{\overline{h}}$ 恰好与展开式中指数上的 $-h$ 和 $-\overline{h}$ 相互抵消. 于是，在柱坐标下，场变成了 Fourier 级数展开

$$\phi_{\text{cyl}}(w,\overline{w}) = \sum_{n,\overline{m}} e^{-nw}e^{-\overline{m}\overline{w}}\phi_{n,\overline{m}} = \sum_{n,\overline{m}} e^{-n\tau}e^{-\mathrm{i}n\sigma}e^{-\overline{m}\tau}e^{\mathrm{i}\overline{m}\sigma}\phi_{n,\overline{m}} \tag{62}$$

时间演化由 $e^{-n\tau}$ 决定，模式的指标 n 和 $\overline{m}$ 直接对应了能量本征值. 场的量子化通过提升 Laurent 模式 $\phi_{n,\overline{m}}$ 为算符来实现.

通过式 (59)，圆柱面上的过去无穷远点 $x^0 = -\infty$ 被映射到 $z = \overline{z} = 0$. 这促使我们定义渐近 in-态 $|\phi\rangle$ 的形式如下：

$$|\phi\rangle = \lim_{z,\overline{z}\to 0}\phi(z,\overline{z})|0\rangle \tag{63}$$

然而，为了使式 (63) 在 $z = 0$ 处非奇异，即成为一个良定义的渐近 in-态，我们要求

$$\phi_{n,\overline{m}}|0\rangle = 0 \qquad \text{对于} \quad n > -h,\ \overline{m} > -\overline{h} \tag{64}$$

从而

$$|\phi\rangle = \lim_{z,\overline{z}\to 0}\phi(z,\overline{z})|0\rangle = \phi_{-h,-\overline{h}}|0\rangle \tag{65}$$

在 Eculid 空间中，为了保持时间 t 不变，考虑到 $x^0 = \mathrm{i}t$ ，复共轭必须将 $x^0 \mapsto -x^0$，而 Eculid 空间坐标 x^1 保持不变. 对于复坐标 $z = \exp(x^0 + \mathrm{i}x^1)$，厄米共轭将其转换为 $z \mapsto \frac{1}{z^*}$. 所以，在曲面 $\overline{z} = z^*$ 上，场 ϕ 的厄米共轭场定义为

$$\phi^\dagger(z,\overline{z}) = \overline{z}^{-2h}z^{-2\overline{h}}\phi\left(\frac{1}{\overline{z}},\frac{1}{z}\right) \tag{66}$$

对厄米共轭场 $\phi^\dagger$ 进行 Laurent 展开得到

$$\phi^\dagger(z,\overline{z}) = \overline{z}^{-2h}z^{-2\overline{h}}\sum_{n,\overline{m}\in\mathbb{Z}}\overline{z}^{-n+h}z^{-\overline{m}+\overline{h}}\phi_{n,\overline{m}} = \sum_{n,\overline{m}\in\mathbb{Z}}\overline{z}^{-n-h}z^{-\overline{m}-\overline{h}}\phi^\dagger_{n,\overline{m}} \tag{67}$$

将此表达式与式 (61) 的厄米共轭进行比较，我们发现

$$(\phi_{n,\overline{m}})^\dagger = \phi_{-n,-\overline{m}} \tag{68}$$

最后，让我们定义与式 (63) 类似的渐近 out-态

$$\langle\phi| = \lim_{z,\overline{z}\to 0}\langle 0|\phi^\dagger(z,\overline{z}) = \lim_{\overline{w},w\to\infty} w^{2h}\overline{w}^{2\overline{h}}\langle 0|\phi(w,\overline{w}) \tag{69}$$

这里我们使用了式 (66) 以及 $\overline{z} = \overline{w}^{-1}$ 和 $z = w^{-1}$. 同理，为了使渐近 out-态良定义，我们需要

$$\langle 0|\phi_{n,\overline{m}} = 0 \qquad \text{对于} \quad n < h,\ \overline{m} < \overline{h} \tag{70}$$

故

$$\langle\phi| = \lim_{w,\overline{w}\to\infty} w^{2h}\overline{w}^{2\overline{h}}\langle 0|\phi(w,\overline{w}) = \langle 0|\phi_{h,\overline{h}} \tag{71}$$

4.2 径向排序

对守恒流 $j_\mu = T_{\mu\nu}\epsilon^\nu$ ，存在如下的守恒荷

$$Q = \int \mathrm{d}x^1 j_0 \qquad \text{at} \quad x^0 = \text{const} \tag{72}$$

因为 Q 守恒，在任意等时面上计算的积分结果都是一样的，const 有相当的任意性. Q 是算符 A 的对称变换生成元，即

$$\delta A = [Q, A] \tag{73}$$

由坐标变换 (58)可知 $x^0 = \text{const}$. 对应于 $|z| = \text{const.}$，因此式 (72) 中的积分 $\int \mathrm{d}x^1$ 转化为围道积分

$$Q = \frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\oint_C \left(\mathrm{d}z\, T(z)\epsilon(z) + \mathrm{d}\overline{z}\,\overline{T}(\overline{z})\overline{\epsilon}(\overline{z})\right) \tag{74}$$

这个表达式允许我们确定由守恒荷 Q 生成的场 $\phi(z,\overline{z})$ 的无穷小变换. 为此，我们使用 (74) 计算 $\delta\phi=[Q,\phi]$，得到

$$\delta_{\epsilon,\overline{\epsilon}}\phi(w,\overline{w})=\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\oint_C \mathrm{d}z[T(z)\epsilon(z),\phi(w,\overline{w})]+\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\oint_C \mathrm{d}\overline{z}[\overline{T}(\overline{z})\overline{\epsilon}(\overline{z}),\phi(w,\overline{w})] \tag{75}$$

考虑到 C 选择的任意性，在 (75) 中，我们不知道 w 和 $\overline{w}$ 是在围道 C 内部还是外部. 此外我们知道，在量子场论中，算符乘积必须指定时序，在共形场论中时序变为径向排序，我们将两个算符的径向排序定义为

$$\mathrm{R}(A(z)B(w)):=\begin{cases}A(z)B(w) & \text{for } |z|>|w|\\ B(w)A(z) & \text{for } |w|>|z|\end{cases} \tag{76}$$

我们定义 (75) 为

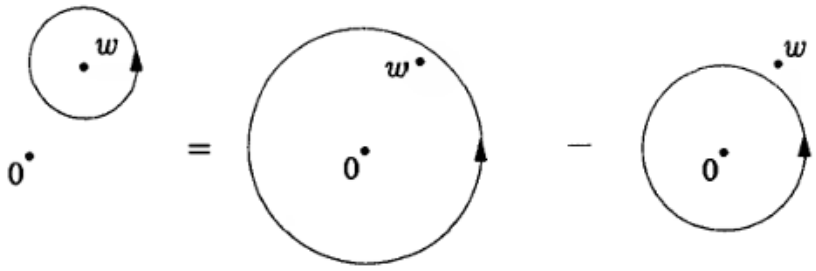


图 1: 围道相减

$$\begin{aligned}\oint_C \mathrm{d}z[A(z),B(w)]&=\oint_{|z|=|w|+\varepsilon}\mathrm{d}zA(z)B(w)-\oint_{|z|=|w|-\varepsilon}\mathrm{d}zB(w)A(z)\\&=\oint_{C(w)}\mathrm{d}z\,\mathrm{R}(A(z)B(w))\end{aligned} \tag{77}$$

其中我们使用了图 (1) 所示的围道关系. 我们可以将式 (75) 表示为

$$\delta_{\epsilon,\overline{\epsilon}}\phi(w,\overline{w})=\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\oint_{C(w)}\mathrm{d}z\,\epsilon(z)\mathrm{R}\big(T(z)\phi(w,\overline{w})\big)+\text{anti-chiral} \tag{78}$$

先前我们得到过(50)，即

$$\delta_{\epsilon,\overline{\epsilon}}\phi(w,\overline{w})=h\big(\partial_w\epsilon(w)\big)\phi(w,\overline{w})+\epsilon(w)\big(\partial_w\phi(w,\overline{w})\big)+\text{anti-chiral}$$

由此可以推导出能量-动量张量与初级场径向排序之间的关系. 对双全纯场 $\phi(w,\overline{w})$ 应用高阶导数公式和 Cauchy 公式

$$\begin{aligned}h\big(\partial_w\epsilon(w)\big)\phi(w,\overline{w})&=\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\oint_{C(w)}\mathrm{d}z\,h\frac{\epsilon(z)}{(z-w)^2}\phi(w,\overline{w})\\ \epsilon(w)\big(\partial_w\phi(w,\overline{w})\big)&=\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\oint_{C(w)}\mathrm{d}z\frac{\epsilon(z)}{z-w}\partial_w\phi(w,\overline{w})\end{aligned} \tag{79}$$

我们得到

$$\mathrm{R}\big(T(z)\phi(w,\overline{w})\big)=\frac{h}{(z-w)^2}\phi(w,\overline{w})+\frac{1}{z-w}\partial_w\phi(w,\overline{w})+\ldots \tag{80}$$

其中省略号表示非奇异项. 像 (80) 这样的表达式被称为算符乘积展开（OPE），它定义了量子场空间上的代数乘积结构.

为简化记号，在下文中，我们将始终假定场的乘积采用径向排序，略去记号 R. 此外，借助式 (80)，我们可以给出初级场的另一种定义. 一个场 $\phi(z,\overline{z})$ 被称为具有共形维度 $(h,\overline{h})$ 的初级场，如果能量-动量张量与

$\phi(z,\overline{z})$ 之间的算符乘积展开采取以下形式

$$\begin{aligned} T(z)\phi(w,\overline{w}) &= \frac{h}{(z-w)^2}\phi(w,\overline{w}) + \frac{1}{z-w}\partial_w\phi(w,\overline{w}) + \dots \\ \overline{T}(\overline{z})\phi(w,\overline{w}) &= \frac{\overline{h}}{(\overline{z}-\overline{w})^2}\phi(w,\overline{w}) + \frac{1}{\overline{z}-\overline{w}}\partial_{\overline{w}}\phi(w,\overline{w}) + \dots \end{aligned} \tag{81}$$

其中省略号表示非奇异项.

在定义了算符乘积展开（OPE）之后，我们现在来考虑能量-动量张量的例子. 我们首先陈述

$$T(z)T(w) = \frac{c/2}{(z-w)^4} + \frac{2T(w)}{(z-w)^2} + \frac{\partial_w T(w)}{z-w} + \dots \tag{82}$$

其中 c 表示中心荷，且 $|z|>|w|$. 反手征部分 $\overline{T}(\overline{z})$ 有类似的结果，而 $T(z)\overline{T}(\overline{w})$ 的 OPE 仅包含非奇异项. 下面我们给出证明. 为此，我们对 $T(z)$ 进行 Laurent 展开

$$T(z) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} z^{-n-2}L_n \qquad \text{其中} \qquad L_n = \frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\oint \mathrm{d}z\, z^{n+1}T(z) \tag{83}$$

考虑共形变换 $\epsilon(z) = -\epsilon_n z^{n+1}$，我们发现

$$Q_n = \oint \frac{\mathrm{d}z}{2\pi\mathrm{i}} T(z)(-\epsilon_n z^{n+1}) = -\epsilon_n \sum_{m\in\mathbb{Z}} \oint \frac{\mathrm{d}z}{2\pi\mathrm{i}} L_m z^{n-m-1} = -\epsilon_n L_n \tag{84}$$

故 L_n 即为无穷小共形变换的生成元. 因此，它们必须满足 Virasoro 代数. 我们验证

$$\begin{aligned} [L_m,L_n] &= \oint \frac{\mathrm{d}z}{2\pi\mathrm{i}} \oint \frac{\mathrm{d}w}{2\pi\mathrm{i}} z^{m+1}w^{n+1}[T(z),T(w)] \\ &= \oint_{C(0)} \frac{\mathrm{d}w}{2\pi\mathrm{i}} w^{n+1} \oint_{C(w)} \frac{\mathrm{d}z}{2\pi\mathrm{i}} z^{m+1}\big[T(z)T(w)\big] \\ &= \oint_{C(0)} \frac{\mathrm{d}w}{2\pi\mathrm{i}} w^{n+1} \oint_{C(w)} \frac{\mathrm{d}z}{2\pi\mathrm{i}} z^{m+1}\left(\frac{c/2}{(z-w)^4} + \frac{2T(w)}{(z-w)^2} + \frac{\partial_w T(w)}{z-w} + \dots\right) \\ &= \oint_{C(0)} \frac{\mathrm{d}w}{2\pi\mathrm{i}} w^{n+1}\Big((m+1)m(m-1)w^{m-2}\frac{c}{2\cdot 3!} \\ &\qquad + 2(m+1)w^m T(w) + w^{m+1}\partial_w T(w)\Big) \\ &= \oint \frac{\mathrm{d}w}{2\pi\mathrm{i}}\Big(\frac{c}{12}(m^3-m)w^{m+n-1} \\ &\qquad + 2(m+1)w^{m+n+1}T(w) + w^{m+n+2}\partial_w T(w)\Big) \\ &= \frac{c}{12}(m^3-m)\delta_{m,-n} + 2(m+1)L_{m+n} \\ &\qquad + 0 - \oint \frac{\mathrm{d}w}{2\pi\mathrm{i}}(m+n+2)T(w)w^{m+n+1} \\ &= (m-n)L_{m+n} + \frac{c}{12}(m^3-m)\delta_{m,-n} \end{aligned} \tag{85}$$

即证.

下面我们将研究能量-动量张量在共形变换下的行为. 特别地，通过比较 OPE (82) 与定义 (81)，我们看到对于非零中心荷，$T(z)$ 不是一个初级场. 可以证明在共形变换 $f(z)$ 下，能量-动量张量的变换如下

$$T'(z) = \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)^2 T(f(z)) + \frac{c}{12}S(f(z),z) \tag{86}$$

其中 $S(w,z)$ 表示 Schwarzian 导数

$$S(w,z) = \frac{1}{(\partial_z w)^2}\left((\partial_z w)(\partial_z^3 w) - \frac{3}{2}(\partial_z^2 w)^2\right) \tag{87}$$

我们不详细证明式 (86)，只在无穷小共形变换 $f(z) = z + \epsilon(z)$ 的层面上验证它. 为此，我们首先使用式 (78)

和 OPE (82) 发现

$$\begin{aligned}\delta_\epsilon T(z) &= \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \oint_{C(z)} \mathrm{d}w\, \epsilon(w) T(w) T(z) \\ &= \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \oint_{C(z)} \mathrm{d}w\, \epsilon(w) \left(\frac{c/2}{(w-z)^4} + \frac{2T(z)}{(w-z)^2} + \frac{\partial_z T(z)}{w-z} + \dots \right) \\ &= \frac{c}{12} \partial_z^3 \epsilon(z) + 2T(z) \partial_z \epsilon(z) + \epsilon(z) \partial_z T(z)\end{aligned} \tag{88}$$

与式 (86) 进行比较. 对于无穷小变换 $f(z) = z + \epsilon(z)$，Schwarzian 导数的主导阶贡献为

$$S(z+\epsilon(z), z) = \frac{1}{(1+\partial_z \epsilon)^2} \left((1+\partial_z \epsilon) \partial_z^3 \epsilon - \frac{3}{2} (\partial_z^2 \epsilon)^2 \right) \simeq \partial_z^3 \epsilon(z) \tag{89}$$

能量-动量张量的变分于是可以计算为

$$\begin{aligned}\delta_\epsilon T(z) &= T'(z) - T(z) \\ &= (1+\partial_z \epsilon(z))^2 \left(T(z) + \epsilon(z) \partial_z T(z) \right) + \frac{c}{12} \partial_z^3 \epsilon(z) - T(z) \\ &= \frac{c}{12} \partial_z^3 \epsilon(z) + 2T(z) \partial_z \epsilon(z) + \epsilon(z) \partial_z T(z)\end{aligned} \tag{90}$$

这与式 (88) 相同. 因此我们在无穷小共形变换的层面上验证了式 (86).

沿与(85)相同的思路进行计算，可以发现对于手征初级场 $\phi(z)$，OPE 的全纯部分等价于

$$[L_m, \phi_n] = ((h-1)m - n) \phi_{m+n} \tag{91}$$

对于所有 $m, n \in \mathbb{Z}$. 如果关系 (81) 和 (91) 仅对 $m = -1, 0, +1$ 成立，则 $\phi(z)$ 被称为准初级场. 将关系 (91) 应用于 Virasoro 代数 (43) 中 $m = -1, 0, +1$ 的值，我们看到手征能量-动量张量是一个共形维度为 $(h, \overline{h}) = (2, 0)$ 的准初级场. 考虑到式 (61)，这一观察也解释了 Laurent 展开 (83) 的形式. 值得注意的是，对于 $\mathrm{SL}(2, \mathbb{C})$ 变换 $w = f(z)$，Schwarzian 导数 $S(w, z)$ 消失，这与 $T(z)$ 是准初级场的事实一致.