路径积分与 Rindler 时空的热力学

呜哩天才琪露诺

日期：2026 年 10 月 18 日

演化算符 $\mathrm{e}^{-\beta H}$ 下的跃迁振幅可以用 Euclidean 路径积分计算

$$\langle\phi_2|\mathrm{e}^{-\beta H}|\phi_1\rangle = \int_{\phi(\tau=0)=\phi_1}^{\phi(\tau=\beta)=\phi_2} \mathcal{D}\phi\, \mathrm{e}^{-S_E[\phi]} \tag{1}$$

$\phi_{1,2}$ 是固定时间切片上的边界条件. 作用量 S_E 是 Euclidean 作用量. 路径积分的具体几何形态取决于等时面的拓扑结构. 比如，若等时面为直线，路径积分在无限长条带上进行；若等时面为圆，路径积分在圆柱面上进行，如图(1)所示.

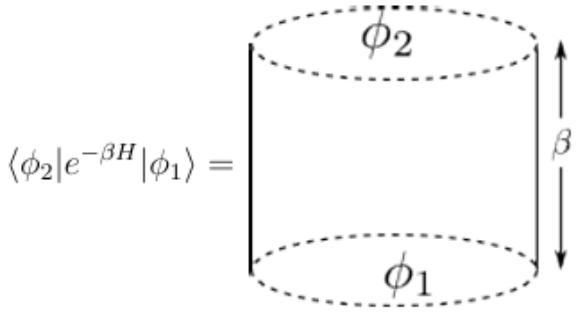


图 1: 等时面为圆时的路径积分

在 Schrödinger 绘景中，量子态 $|\Psi\rangle$ 的波函数定义为与场本征态的 overlap

$$\Psi[\phi_2] = \langle\phi_2|\Psi\rangle \tag{2}$$

因为我们研究的是量子场论，这里的波函数其实是泛函，它的自变量是场的经典位形 ϕ_2，而 $\langle\phi_2|$ 是对应的量子本征态.

考虑态 $|\Psi\rangle = \mathrm{e}^{-\tau H}|\phi_1\rangle$. 我们可以对流形进行切割. 一个切割是余维度为 1 的空间切片 Σ. 对跃迁振幅，我们在两个切割上指定了数据，如果路径积分只有一端指定了边界条件（如 $\tau = 0$ 处为 ϕ_1），另一端（$\tau = \beta$）开放，这就定义了一个量子态

$$|\Psi\rangle = \int_{\phi(0)=\phi_1}^{\phi(\beta)=?} \mathcal{D}\phi\, \mathrm{e}^{-S[\phi]} \equiv \text{带开切割的路径积分} \tag{3}$$

这里我们清楚地看到态 $|\Psi\rangle$ 是一个泛函，它把场数据 $\langle\phi_2|$ 映射为一个复数 $\langle\phi_2|\Psi\rangle$. 任何带有开切割 Σ 的路径积分，都定义了在 Σ 上的一个量子态. 例如，在 2D QFT 中，一个带有开切割 S^1 的环面，其路径积分定义了在边界圆 S^1 上的一个特定量子态 $|X\rangle$. 其波函数 $X[\phi_2] = \langle\phi_2|X\rangle$ 由对应的路径积分计算. 如图(2).

态是定义在类空超曲面上的泛函，不关心（加上时间后的）整个流形是 Euclidean 还是 Lorentzian. 由 Euclidean 路径积分构造的泛函只要满足 Hilbert 空间的正定性等要求，就完全是一个合法量子态. 一旦我们承认 $|X\rangle$ 是 Lorentzian Hilbert 空间中合法的态，它就可以沿 Lorentzian 时间演化 $|X(t)\rangle = \mathrm{e}^{-iHt}|X\rangle$，这个演化对



图 2: 带开切割的路径积分定义量子态

应 Lorentzian 流形上的路径积分. 由于 $|X\rangle$ 最初是由 Euclidean 路径积分定义的，$|X(t)\rangle$ 对应的路径积分是部分 Euclidean、部分 Lorentzian 的. 这种混合路径积分被称为 “折叠” 路径积分. 在计算跃迁振幅 $\langle\phi_2|X(t)\rangle$ 时，底部的 Euclidean 部分提供 e^{-S_E}，而顶部的 Lorentzian 部分提供 e^{iS}. 如图(3)所示.

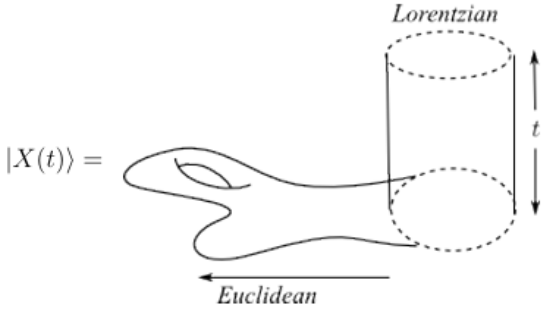


图 3: 折叠路径积分

Euclidean 时间演化会抑制激发态. 将任意态 $|Y\rangle = \sum_n y_n|n\rangle$ 演化足够长的 Euclidean 时间 $\tau \to \infty$ 有

$$\mathrm{e}^{-\tau H}|Y\rangle \approx \mathrm{e}^{-\tau E_0} y_0|0\rangle \tag{4}$$

这提供了一种通过路径积分投影出基态（真空态）的方法，将路径积分延伸到无穷远（半无限平面或半无限圆柱）. 这些态是未归一化的.

通过粘合切割，可以构建跃迁振幅. 例如，真空到真空的振幅 $\langle 0|0\rangle$ 可以通过将下半平面（产生 $|0\rangle$）和上半平面（产生 $\langle 0|$）在 $\tau = 0$ 处粘合得到

$$\langle 0|0\rangle = \int \mathcal{D}\phi\, \mathrm{e}^{-S_E[\phi]} \tag{5}$$

在算符语言中，粘合等价于插入完备性关系 $\langle 0|0\rangle = \sum_{\phi_1}\langle 0|\phi_1\rangle\langle\phi_1|0\rangle$. $\langle 0|\phi_1\rangle$ 是上半平面的路径积分而 $\langle\phi_1|0\rangle$ 是下半平面的路径积分，对 ϕ_1 求和相当于要求场在 $\tau = 0$ 处是连续的.

在路径积分中插入局域算符，即可计算关联函数. 在 Euclidean signature 下

$$\langle O_1(x_1)O_2(x_2)\rangle \equiv \langle 0|O_2(x_2)O_1(x_1)|0\rangle = \int \mathcal{D}\phi\, O_1(x_1)O_2(x_2)\mathrm{e}^{-S_E[\phi]} \tag{6}$$

LHS 默认时序. 作为定义，交换算符顺序不影响物理意义. RHS 是算符乘积. 取 Euclidean 号差，场是对易的，这是因为路径积分 $\int \mathcal{D}\phi\, O_1 O_2 \ldots \mathrm{e}^{-S_E}$ 计算的是统计平均，所以它们像统计力学中的可观测值一样对易. Lorentzian 号差下，关联函数不是坐标的解析函数. 当 O_2 进入 O_1 的光锥时，会出现分支割线，必须引入 $i\epsilon$ prescription 来定义函数. 不同的 $i\epsilon$ 选择给出不同的关联函数（时序、反时序、推迟、超前），我们用算符的不同排列顺序来标记这些选择.

密度矩阵是一个算符，吃掉一个左矢和一个右矢，产生一个复数. 带有两个开切割的路径积分定义了（未归一化的）密度矩阵. 例如，Euclidean 演化算子就是一个密度矩阵

$$\rho \equiv \mathrm{e}^{-\beta H} \tag{7}$$

其矩阵元为 $\langle\phi_2|\rho|\phi_1\rangle$，由开切割上的边界条件计算. 它是逆温度为 β 的热系综的密度矩阵，热配分函数就是它的迹

$$Z(\beta) = \mathrm{Tr}\mathrm{e}^{-\beta H} = \sum_{\phi_1}\langle\phi_1|\mathrm{e}^{-\beta H}|\phi_1\rangle \tag{8}$$

求迹的过程等价于将密度矩阵路径积分的两个开切割粘合在一起（即对 ϕ_1 求和并施加周期性边界条件）.

若等时面为圆，粘合圆柱体两端得到环面，$Z(\beta)$ 等于环面上的路径积分；若等时面为直线，粘合无限长条带得到周期为 β 的无限长圆柱体；对 R^{d-1}，热配分函数对应 $R^{d-1}\times S^1$ 上的路径积分；对 S^{d-1}，则对应 $S^{d-1}\times S^1$.

有限温度下的等时关联函数定义为

$$\langle O_1(0,\vec{x}_1)O_2(0,\vec{x}_2)\ldots\rangle_\beta \equiv \mathrm{Tr}\mathrm{e}^{-\beta H}O_1(0,\vec{x}_1)O_2(0,\vec{x}_2)\ldots \tag{9}$$

同样地，这可以通过在圆柱（或环面）上进行路径积分计算.

我们考虑一个 2d 量子场论，整个系统处于 Minkowski 真空态

$$\rho = |0\rangle\langle 0| \tag{10}$$

这是一个纯态. 然后我们将 $t=0$ 的 Cauchy 面划分为 $x>0$ 的区域 A 和 $x<0$ 的区域 B. 我们假定区域 A 中的观察者无法获取区域 B 的任何信息，区域 A 的物理由约化密度矩阵描述

$$\rho_A \equiv \mathrm{Tr}_B\rho \tag{11}$$

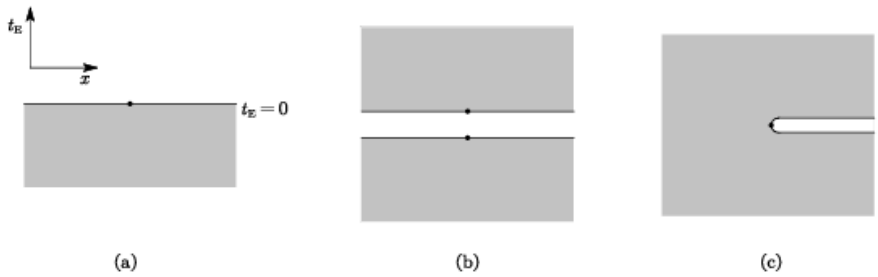


图 4: 割线 $x>0$

$|0\rangle$ 和 $\langle 0|$ 可以分别通过下、上半平面路径得到. 沿着 $x<0$ 的区域粘合求迹，在 $x>0$ 的边界留下两个开口，如图(4)所示. 我们可以用极坐标 $r^2+r^2d\theta^2$ 重新切片这个路径积分，并将角度 θ 视为“时间”. 设 θ 平移的无穷小生成元是 H_R，即对任意算符 O 有 $[H_\mathrm{R},O]=\hbar\partial_\theta O$. 因为 θ 的周期为 2π，路径积分为

$$\rho_A = \mathrm{e}^{-2\pi H_\mathrm{R}} \tag{12}$$

这是一个热态，温度为 $1/2\pi$，但这个温度是相对于旋转生成元 H_R 定义的. 通过 Wick 转动 $\theta\to i\eta$ 换到 Lorentzian 时空，H_R 变成 Boost 生成元 H_η，这就是加速观测者的哈密顿量.

在 Lorentz 号差下，部分 Cauchy 面 A 的依赖域是右 Rindler 楔形区 R_r，定义为 $x>|t|$. 无论我们研究的是何种量子场论，原则上都可由其运动方程和 A 上的初始数据来决定 R_r 中的场. 因此，R_r 中的任何观测都可以视为对 ϕ 的观测，密度矩阵 ρ_A 可以协变地描述为与 R_r 中观测相对应的密度矩阵. 类似地，密度矩阵 ρ_B

对应于在相对的另一个 Rindler 楔形区 R_ℓ（定义为 $x<-|t|$）中所做的观测.

在一个 Lorentz 号差的时空 M 中，集合 U 的依赖域记为 $D(U)$. 它是满足以下条件的最大集合

1. 在 $D(U)$ 内，标准相对论波动方程（如 Klein-Gordon 方程）的解，可由 U 上的初始数据完全决定.
2. 等价地，当且仅当通过点 p 的任意因果曲线，如果向过去和未来延续足够远，最终都会与 U 相交，那么点 $p\in M$ 就位于 $D(U)$ 中.

这一定义连同相对论因果性意味着，点 p 处观测到的信号，完全由 U 上的初值（或终值）数据决定.

考虑无质量自由标量场，运动方程为 $\Box\Phi=0$. 分离变量 $\Phi=\mathrm{e}^{-i\omega\eta}f(r)$，得到解

$$\Phi=\mathrm{e}^{-i\omega\eta+ik\log r},\quad \omega^2=k^2,\quad \omega>0 \tag{13}$$

场算符展开为

$$\hat{\Phi}(\eta,r)=\int dk\left(b_k\Phi_k+b_k^\dagger\Phi_k^*\right) \tag{14}$$

Rindler 真空定义为 $b_k|0\rangle_\mathrm{R}=0$. 显然，Minkowski 真空 $|0\rangle_\mathrm{M}$ 与 Rindler 真空 $|0\rangle_\mathrm{R}$ 是不同的.

在 Minkowski 真空中，Rindler 粒子的分布由 $\rho_\mathrm{R}=\mathrm{e}^{-2\pi H_\mathrm{R}}$ 决定. 考虑一个 Rindler 能量为 $\omega=|k|$ 的模式，其平均粒子数为

$$\langle n_k\rangle=\frac{1}{Z}\mathrm{Tr}\left(\mathrm{e}^{-2\pi H_\mathrm{R}}b_k^\dagger b_k\right),\quad Z=\mathrm{Tr}\mathrm{e}^{-2\pi H_\mathrm{R}} \tag{15}$$

其中 $b_k^\dagger b_k$ 是粒子数算符，本征值为 $n=0,1,2,\ldots$，我们得到

$$\langle n_k\rangle=\frac{\sum_{n\geq0}n\mathrm{e}^{-2\pi n|k|}}{\sum_{n\geq0}\mathrm{e}^{-2\pi n|k|}}=\frac{1}{\mathrm{e}^{2\pi|k|}-1} \tag{16}$$

这正是一个完美的 Planck 黑体谱!

Rindler 时间 η 是无量纲的，因此 ω 也是无量纲的. 然而，一个真实的加速观测者拿着温度计，测量的是相对于其固有时 τ_obs 的能量. 对于一个恒定加速度为 a 的观测者，其固有时与 Rindler 时间的关系为

$$d\tau_\mathrm{obs}=\mathrm{R}_\mathrm{obs}d\eta=\frac{1}{a}d\eta\implies\omega_\mathrm{obs}=a\omega \tag{17}$$

因此，温度计上的读数（Unruh 温度）为

$$T_\mathrm{obs}=\frac{a}{2\pi} \tag{18}$$

这就是著名的 Unruh 效应. 在 Minkowski 真空中加速的观测者，会感受到一个温度为 $a/2\pi$ 的热浴. 上述推导假设观测者永远加速. 如果观测者只是短暂加速，温度计无法在有限时间内达到热平衡. 只有当加速时间 $t\gg t_\mathrm{equil}\sim1/T\sim\mathrm{R}_0$ 时，Unruh 温度才有物理意义.

在 Rindler 真空 $|0\rangle_\mathrm{R}$ 中，加速观测者测不到粒子. 但是，惯性观测者会看到什么? Rindler 真空在视界处是奇异的. 惯性观测者测量的能量密度在 Rindler 视界处发散. 为什么会有这种奇异性? 因为缺乏纠缠. 在 Rindler 真空中，左右 Rindler 楔形之间没有任何关联

$$_\mathrm{R}\langle0|\phi(x_1)\phi(x_2)|0\rangle_\mathrm{R}=0\quad\text{for } x_1\in\mathrm{R}_\ell, x_2\in\mathrm{R}_r \tag{19}$$

如果没有关联，这两个楔形在物理上就是完全独立的. 视界就成了绝对的边界，导致视界处的能量发散. 为了在视界处获得有限的能量密度，必须有大量的左右楔形之间的纠缠. 在 Minkowski 真空中，左右 Rindler 楔形处于最大纠缠态（类似于 Bell 态）. 任何具有平滑视界的态，都必须高度纠缠.

任何混合态 ρ 都可以被视为更大系统中的纯态. Minkowski 希尔伯特空间可以写为左右 Rindler 希尔伯特空间的张量积

$$\mathcal{H}_\mathrm{M}=\widetilde{\mathcal{H}}_\mathrm{R}\otimes\mathcal{H}_\mathrm{R} \tag{20}$$

在 $t=0$ 时刻，Minkowski 场位形 $\phi_\mathrm{M}(x)$ 可以写成一对左右 Rindler 场位形 $(\widetilde{\phi}_\mathrm{R},\phi_\mathrm{R})$.

Minkowski 真空的波函数定义为

$$\Psi_0[\widetilde{\phi}_{\mathrm{R}},\phi_{\mathrm{R}}]={}_{\mathrm{M}}\langle\widetilde{\phi}_{\mathrm{R}},\phi_{\mathrm{R}}|0\rangle_{\mathrm{M}} \tag{21}$$

$|0\rangle_{\mathrm{M}}$ 可以通过下半平面的路径积分得到，${}_{\mathrm{M}}\langle\widetilde{\phi}_{\mathrm{R}},\phi_{\mathrm{R}}|$ 相当于指定边界条件

$$\phi_{\mathrm{M}}(x)=\begin{cases}\widetilde{\phi}_{\mathrm{R}}, & x<0\\ \phi_{\mathrm{R}}, & x>0\end{cases} \tag{22}$$

这个路径积分也可以从 $\theta=0$ 出发，经下半平面到达 $\theta=\pi$ 完成. 波函数因此重写为

$$\Psi_0[\widetilde{\phi}_{\mathrm{R}},\phi_{\mathrm{R}}]={}_{\mathrm{R}}\langle\widetilde{\phi}_{\mathrm{R}}|\mathrm{e}^{-\pi H_{\mathrm{R}}}|\phi_{\mathrm{R}}\rangle_{\mathrm{R}} \tag{23}$$

这里，$|\phi_{\mathrm{R}}\rangle_{\mathrm{R}}$ 是右 Rindler 楔形中场算符 $\hat{\phi}_{\mathrm{R}}$ 的本征态. 在算符表达式中插入 Rindler 能量本征态的完备性关系

$$\mathbb{I}=\sum_n|n\rangle_{\mathrm{RR}}\langle n| \tag{24}$$

得到

$$\begin{aligned}\Psi_0[\widetilde{\phi}_{\mathrm{R}},\phi_{\mathrm{R}}]&=\sum_n{}_{\mathrm{R}}\langle\widetilde{\phi}_{\mathrm{R}}|n\rangle_{\mathrm{R}}\langle n|\mathrm{e}^{-\pi H_{\mathrm{R}}}|\phi_{\mathrm{R}}\rangle_{\mathrm{R}}\\&=\sum_n\mathrm{e}^{-\pi E_n}{}_{\mathrm{R}}\langle\widetilde{\phi}_{\mathrm{R}}|n\rangle_{\mathrm{RR}}\langle n|\phi_{\mathrm{R}}\rangle_{\mathrm{R}}\end{aligned} \tag{25}$$

现在我们定义热场双重 (TFD) 态

$$|\mathrm{TFD}\rangle_{\mathrm{R}\otimes\mathrm{R}}\equiv\sum_{\mathrm{n}}\mathrm{e}^{-\beta\mathrm{E_n}/2}|\mathrm{n}\rangle_{\mathrm{R}}|\mathrm{n}\rangle^*_{\mathrm{R}} \tag{26}$$

其中 * 表示 CPT 共轭. 左 Rindler 楔形的时间流向与右楔形相反 $(t\to-t)$，因此左楔形的态需要取 CPT 共轭，以确保整体的 Minkowski 演化是幺正的.

验证矩阵元

$${}_{\mathrm{M}}\langle\widetilde{\phi}_{\mathrm{R}},\phi_{\mathrm{R}}|\mathrm{TFD}\rangle_{\mathrm{R}\otimes\mathrm{R}}=\sum_{\mathrm{n}}\mathrm{e}^{-\pi\mathrm{E_n}}{}_{\mathrm{R}}\langle\widetilde{\phi}_{\mathrm{R}}|\mathrm{n}\rangle^*_{\mathrm{RR}}\langle\phi_{\mathrm{R}}|\mathrm{n}\rangle_{\mathrm{R}}=\Psi_0[\widetilde{\phi}_{\mathrm{R}},\phi_{\mathrm{R}}] \tag{27}$$

其中利用了 CPT 共轭的性质 ${}_{\mathrm{R}}\langle\widetilde{\phi}_{\mathrm{R}}|n\rangle^*_{\mathrm{R}}={}_{\mathrm{R}}\langle n|\widetilde{\phi}_{\mathrm{R}}\rangle$. 对 TFD 态的左 Rindler 希尔伯特空间 B 求偏迹

$$\rho_A=\mathrm{Tr}_B|\mathrm{TFD}\rangle\langle\mathrm{TFD}|=\sum_{\mathrm{n}}\mathrm{e}^{-2\pi\mathrm{E_n}}|\mathrm{n}\rangle_{\mathrm{RR}}\langle\mathrm{n}|=\mathrm{e}^{-2\pi\mathrm{H_R}} \tag{28}$$

重新给出了 Unruh 热态.

下面我们介绍纯化的标准方式. 可以通过将 ρ 看作一个线性变换 $\mathcal{V}\mathcal{K}\to\mathcal{K}$ 来构造. 首先，我们将线性变换 $\mathcal{V}$ 在某组基下展开

$$\mathcal{V}=\sum_{i,j}v_{ij}|i\rangle\langle j| \tag{29}$$

由此，我们可以将 $\mathcal{V}$ 与一个在双重希尔伯特空间 $\mathcal{K}\otimes\mathcal{K}'$ 中的态矢 $\Psi_{\mathcal{V}}$ 联系起来

$$\Psi_{\mathcal{V}}=\sum_{i,j}v_{ij}|i\rangle\otimes|j\rangle' \tag{30}$$

这里的 $\mathcal{K}'$ 是 $\mathcal{K}$ 的复共轭希尔伯特空间. 也就是说，对于 $\mathcal{K}$ 中的每个左矢 $\langle j|$，都可以典范地选取一个在 $\mathcal{K}'$ 中的右矢 $|j\rangle'$. 对纯态密度矩阵 $|\Psi_{\mathcal{V}}\rangle\langle\Psi_{\mathcal{V}}|$ 中的 $\mathcal{K}'$ 自由度求迹

$$\mathcal{V}\mathcal{V}^\dagger=\mathrm{Tr}_{\mathcal{K}'}\left(|\Psi_{\mathcal{V}}\rangle\langle\Psi_{\mathcal{V}}|\right) \tag{31}$$

特别地，如果 $\mathrm{Tr}(\mathcal{V}\mathcal{V}^\dagger)=1$，那么 $\mathcal{V}\mathcal{V}^\dagger$ 就是一个合法的密度矩阵，而 $\Psi_{\mathcal{V}}$ 就是该密度矩阵的一个纯化. 对于任意密度矩阵 ρ，它的正平方根是 $\rho^{1/2}$. 令 $\mathcal{V}=\rho^{1/2}$，那么对应的态 $\Psi_{\rho^{1/2}}\in\mathcal{H}\otimes\mathcal{H}'$ 就是 ρ 的一个纯化，我们称之为标准纯化. 它的物理意义是将密度矩阵对角化后，直接对特征值的平方根开方，作为纠缠态的系数.

考虑一个普通的玻色谐振子，其产生和湮灭算符 $a^\dagger, a$ 满足 $[a, a^\dagger] = 1$，哈密顿量 $H = \omega a^\dagger a$. 在逆温为 β 的热平衡状态下，密度矩阵为

$$\rho = \frac{1}{Z}\sum_{n=0}^{\infty} \mathrm{e}^{-n\beta\omega}|n\rangle\langle n| \tag{32}$$

其中 $|n\rangle$ 是第 n 激发态，$Z = \sum_n \mathrm{e}^{-n\beta\omega} = \dfrac{1}{1-\mathrm{e}^{-\beta\omega}}$. 我们引入一个完全相同副本的谐振子，其算符为 $a', a'^\dagger$. 热场双态定义为

$$|\Psi_{\text{TFD}}\rangle = \frac{1}{\sqrt{Z}}\sum_{n=0}^{\infty} \mathrm{e}^{-n\beta\omega/2}|n\rangle \otimes |n\rangle' \tag{33}$$

这里 $|n\rangle'$ 是辅助谐振子的第 n 激发态.

利用 $a^\dagger|n\rangle = \sqrt{n+1}|n+1\rangle$ 等关系，我们可以得出

$$\left(a^\dagger - \mathrm{e}^{-\beta\omega/2}a'\right)|\Psi_{\text{TFD}}\rangle = 0 \tag{34}$$

$$\left(a - \mathrm{e}^{-\beta\omega/2}a'^\dagger\right)|\Psi_{\text{TFD}}\rangle = 0 \tag{35}$$

这两个条件唯一确定了 $|\Psi_{\text{TFD}}\rangle$，至多差一个标量因子.

对于费米子，情形类似，但需要引入额外的负号. 费米子的湮灭算符 c 和产生算符 $c^\dagger$ 满足 $\{c, c^\dagger\} = 1$，作用在由两个基态组成的 2 维希尔伯特空间上，其中一个为 $|0\rangle$（满足 $c|0\rangle = 0$），另一个为 $|1\rangle = c^\dagger|0\rangle$. 设哈密顿量为 $H = \omega c^\dagger c$，其热密度矩阵为

$$\rho = \frac{1}{2}\left(|0\rangle\langle 0| + \mathrm{e}^{-\beta\omega}|1\rangle\langle 1|\right) \tag{36}$$

为了构造热场双态，我们引入另一个完全相同副本的费米子，其产生和湮灭算符分别为 $c', \bar{c}'$，且与 $c, c^\dagger$ 反对易. 我们在一个 4 维希尔伯特空间中表示这些算符，其基态为 $|0,0\rangle$（被 c 和 c' 同时湮灭），其他态为 $|1,0\rangle = c^\dagger|0,0\rangle$，$|0,1\rangle = c'^\dagger|0,0\rangle$，$|1,1\rangle = c^\dagger c'^\dagger|0,0\rangle$. 费米子的热场双态为

$$|\Psi_{\text{TFD}}\rangle = \frac{1}{Z^{1/2}}\left(|0,0\rangle + \mathrm{e}^{-\beta\omega/2}|1,1\rangle\right) \tag{37}$$

其中 $Z = 1 + \mathrm{e}^{-\beta\omega}$. 它满足以下条件

$$\left(c - \mathrm{e}^{-\beta\omega/2}c'^\dagger\right)|\Psi_{\text{TFD}}\rangle = 0 \tag{38}$$

$$\left(c^\dagger + \mathrm{e}^{\beta\omega/2}c'\right)|\Psi_{\text{TFD}}\rangle = 0 \tag{39}$$

我们还可以用一种极具启发性的方法证明 Minkowski 真空态 Ω 正是 Rindler 楔形的热场双态. 考虑 2 维 Minkowski 时空，度规为

$$ds^2 = -dt^2 + dx^2 = -2dudv \tag{40}$$

其中 $v = \dfrac{1}{\sqrt{2}}(t+x)$ 和 $u = \dfrac{1}{\sqrt{2}}(t-x)$ 是光锥坐标. 生成 v 方向平移的算符 P 是半正定的，它仅湮灭真空态. 对任意算符 $\mathcal{O}$，满足

$$[P, \mathcal{O}] = -i\frac{d}{dv}\mathcal{O} \tag{41}$$

考虑一个满足下述反对易关系的 Hermitian 手征自由费米子场 $\lambda(v)$

$$\{\lambda(v), \lambda(v')\} = \delta(v - v') \tag{42}$$

我们将 $\lambda(v)$ 做 Fourier 变换到“动量”空间

$$A_\omega = \int_{-\infty}^{\infty} dv\, \mathrm{e}^{-i\omega v}\lambda(v) \tag{43}$$

由此得到算符的反对易关系以及它们与 P 的对易关系

$$\{A_\omega, A_{\omega'}\} = 2\pi\delta(\omega + \omega'), \quad [P, A_\omega] = \omega A_\omega \tag{44}$$

根据 P 的谱性质，我们立刻得出对于 $\omega < 0$（负频），A_ω 是湮灭算符；对于 $\omega > 0$，A_ω 是产生算符. Minkowski 真空 Ω 被所有湮灭算符湮灭

$$A_\omega \Omega = 0, \quad \forall \omega < 0 \tag{45}$$

更一般地，如果函数 $f(v)$ 在 v 平面的上半平面是全纯且有界的，那么任意由它构建的算符都会湮灭真空

$$A'_f = \int_{-\infty}^{\infty} dv\, f(v)\lambda(v) \tag{46}$$

因为这样的函数可以写成 $f(v) = \displaystyle\int_0^\infty d\omega\, \mathrm{e}^{-i\omega v} g(\omega)$（即只有正频分量），所以 A'_f 是正频产生算符的线性组合.

现在我们切换到 Rindler 观察者的视角. 右 Rindler 楔形 $\mathcal{R}_r$ 定义为 $x > |t|$（在 u, v 坐标下即 $v > 0, u < 0$）. 在这个区域内，生成洛伦兹 boost 的 Killing 矢量场为

$$k = v\partial_v - u\partial_u \tag{47}$$

令 K 为与 k 对应的 Hermitian 算符. 对费米子场 $\lambda(v)$，其作用为

$$[K, \lambda(v)] = -i\left(v\partial_v + \frac{1}{2}\right)\lambda(v) \tag{48}$$

（这里 $+1/2$ 的项反映了 λ 具有自旋 $1/2$）.

在 $\mathcal{R}_r$ 内，观察者测量 $\omega > 0$ 的粒子. 定义在这个楔形内的模式算符（其中 $v > 0$）

$$U_\omega = \int_0^\infty dv\, v^{-i\omega - 1/2}\lambda(v) \tag{49}$$

它满足本征方程

$$[K, U_\omega] = \omega U_\omega \tag{50}$$

对于 $\omega > 0$，U_ω 在 Rindler 楔形内是产生算符；对于 $\omega < 0$，它是湮灭算符. 但是，U_ω 不能湮灭 Minkowski 真空 Ω. 原因在于积分 $\displaystyle\int_0^\infty dv$ 意味着被积函数 $v^{-i\omega-1/2}$ 在 $v < 0$ 处为零，这导致该函数在复平面的上半平面不是全纯的（它有一个分支割线）. 为了得到湮灭 Minkowski 真空的算符，我们必须引入解析延拓.

为了让函数在 v 的整个上半平面全纯，我们需要引入 $i\epsilon$ 补偿，并定义新的算符

$$V_\omega = \int_{-\infty}^{\infty} dv\, (v + i\epsilon)^{-i\omega - 1/2}\lambda(v) \tag{51}$$

这就是相对于 Minkowski 真空的湮灭算符.

对于 $v < 0$，利用解析延拓

$$\lim_{\epsilon \to 0^+} (v + i\epsilon)^{-i\omega - 1/2} = \begin{cases} v^{-i\omega - 1/2}, & v > 0 \\ -i\mathrm{e}^{\pi\omega}(-v)^{-i\omega - 1/2}, & v < 0 \end{cases} \tag{52}$$

我们定义左 Rindler 楔形（$\mathcal{R}_l$）中的算符 $\tilde{U}_\omega$

$$\tilde{U}_\omega = \begin{cases} i\displaystyle\int_0^\infty dv\, v^{i\omega - 1/2}\lambda(-v), & \omega < 0 \\ -i\displaystyle\int_0^\infty dv\, v^{i\omega - 1/2}\lambda(-v), & \omega > 0 \end{cases} \tag{53}$$

这里对 ω 的符号选择，以及前面的 $\pm i$ 因子，是为了与 Fermi 统计的反对易关系保持一致. 基于这些定义，我们可以得到

$$V_\omega = \begin{cases} U_\omega - \mathrm{e}^{\pi\omega}\tilde{U}_{-\omega}, & \omega < 0 \\ U_\omega + \mathrm{e}^{\pi\omega}\tilde{U}^\dagger_{-\omega}, & \omega > 0 \end{cases} \tag{54}$$

由于 V_ω 对所有 ω 都湮灭 Minkowski 真空 Ω，即 $V_\omega \Omega = 0$. 代入上式，我们可以得到关于 U 和 $\tilde{U}$ 的关系式

- 当 $\omega < 0$ 时 $U_\omega \Omega = \mathrm{e}^{\pi\omega}\tilde{U}_{-\omega}\Omega$，即 $(U_\omega - \mathrm{e}^{\pi\omega}\tilde{U}_{-\omega})\Omega = 0$.

- 当 $\omega > 0$ 时 $U_\omega \Omega = -\mathrm{e}^{\pi\omega} \tilde{U}^\dagger_{-\omega} \Omega$，即 $(U_\omega + \mathrm{e}^{\pi\omega} \tilde{U}^\dagger_{-\omega})\Omega = 0$.

这完全等价于先前的(38)和(39).