路径积分量子化

呜哩天才琪露诺

华中科技大学物理学院

日期：2026 年 8 月 4 日

目录

1 量子力学中的路径积分 **1**

1.1 单粒子系统的路径积分 1

1.2 多自由度系统的路径积分 3

2 标量场的路径积分 **4**

2.1 积去正则动量 4

2.2 关联函数 4

2.3 生成泛函 5

2.4 相互作用 6

3 矢量场的路径积分 **7**

4 费米子路径积分 **8**

4.1 Grassmann 代数 8

4.2 微分与积分 8

4.3 Grassmann 高斯积分 9

5 路径积分中的运动方程、守恒律与 Ward-Takahashi 恒等式 **10**

5.1 量子运动方程与 Schwinger-Dyson 方程 10

5.2 守恒律：Noether 定理的量子推广 11

5.3 QED 中的 Ward-Takahashi 恒等式 13

1 量子力学中的路径积分

1.1 单粒子系统的路径积分

量子力学中，我们有叠加原理：一个过程的概率幅是各个子过程概率幅之和. 则单粒子从 x_a 运动到 x_b 的概率幅就是所有可能路径概率幅的叠加

$$U(x_a, x_b; T) = \sum_{\text{all paths}} e^{\mathrm{i}\cdot\text{phase}} = \int \mathcal{D}x(t)\, e^{\mathrm{i}\cdot\text{phase}} \tag{1}$$

各个概率幅只相差相位，说明各个路径无本质差异. $\int \mathcal{D}x(t)$ 是在由路径 $x(t)$ 构成的连续函数空间内积分. 从函数空间到复数的映射称为泛函，记为 $F[x(t)]$，e^{iphase} 就是一个泛函.

相位应该取什么样的形式? 我们论证 $\text{phase} = \dfrac{S}{\hbar}$. 考虑经典极限，$S \gg \hbar$，$e^{\mathrm{i}\frac{S}{\hbar}}$ 快速震荡，只有 $\dfrac{\delta}{\delta x(t)} S[x(t)]$ 的路径才有贡献，而根据经典力学的最小作用量原理

$$\frac{\delta}{\delta x(t)} S[x(t)]\bigg|_{x_{\text{cl}}} = 0 \tag{2}$$

这恰好就是经典路径 x_{cl}. 从而

$$U(x_a, x_b; T) = \int \mathcal{D}x(t) e^{\mathrm{i}\frac{S[x(t)]}{\hbar}} \tag{3}$$

以双缝干涉实验为例进行检验. 粒子的作用量 $S = \dfrac{1}{2}mv^2 t$，对两条路径而言 v 分别为 $\dfrac{D}{t}$ 和 $\dfrac{D+d}{t}$，相位分别为 $\dfrac{mD^2}{2\hbar t}$ 和 $\dfrac{m(D+d)^2}{2\hbar t}$，相位差 $\dfrac{mDd}{\hbar t} \approx \dfrac{pd}{\hbar}$，波长 $\lambda = \dfrac{h}{p}$，与 de Broglie 关系符合.

下一步需要定义泛函的积分测度 $\mathcal{D}x(t)$. 为此，我们把路径分成时间间隔为 ε 的小段，定义

$$\int \mathcal{D}x(t) \equiv \frac{1}{C(\varepsilon)} \prod_k \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x_k}{C(\varepsilon)} \tag{4}$$

其中 $C(\varepsilon)$ 为待定常数. 为了定出这个常数，我们对作用量进行离散化

$$S = \int_0^T \mathrm{d}t \left[\frac{m}{2}\dot{x}^2 - V(x)\right] \longrightarrow \sum_k \left[\frac{m}{2}\frac{(x_{k+1}-x_k)^2}{\varepsilon} - \varepsilon V\left(\frac{x_{k+1}+x_k}{2}\right)\right] \tag{5}$$

考虑路径的最后一小段，则

$$U(x_a, x_b; T) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x'}{C(\varepsilon)} \exp\frac{\mathrm{i}}{\hbar}\left[\frac{m(x_b - x')^2}{2\varepsilon} - \varepsilon V\left(\frac{x_b + x'}{2}\right)\right] U(x_a, x'; T-\varepsilon) \tag{6}$$

指数上的 $\dfrac{\mathrm{i}}{\hbar}\dfrac{x_b - x'}{2\varepsilon}$ 使得 $x' \sim x_b$ 的部分才有贡献，Taylor 展开得

$$\begin{aligned} U(x_a, x_b; T) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x'}{C(\varepsilon)} \exp\left[\frac{\mathrm{i}}{\hbar}\frac{m(x_b - x')^2}{2\varepsilon}\right] \left[1 - \frac{\mathrm{i}}{\hbar}\varepsilon V(x_b) + \cdots\right] \\ \left[1 + (x' - x_b)\frac{\partial}{\partial x_b} + \frac{1}{2}(x' - x_b)^2 \frac{\partial^2}{\partial x_b^2}\right] U(x_a, x_b; T-\varepsilon) \end{aligned} \tag{7}$$

Gauss 积分 $\int \xi^n e^{-\frac{1}{2}a\xi^2} \mathrm{d}\xi \sim \xi^{-\frac{n+1}{2}}$，从而 $\int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left[\dfrac{\mathrm{i}}{\hbar}\dfrac{m(x_b - x')^2}{2\varepsilon}\right](x' - x_b)^n \sim \varepsilon^{\frac{n+1}{2}}$. 保留至 $\dfrac{3}{2}$ 阶，则

$$U(x_a, x_b; T) = \frac{1}{C}\sqrt{\frac{2\pi\hbar\varepsilon}{-\mathrm{i}m}} \left[1 - \frac{\mathrm{i}\varepsilon}{\hbar}V(x_b) + \frac{\mathrm{i}\varepsilon\hbar}{2m}\frac{\partial^2}{\partial x_b^2} + O(\varepsilon^2)\right] U(x_a, x_b; T-\varepsilon) \tag{8}$$

要使这个式子在 $\varepsilon \to 0$ 时有意义，则 $C = \sqrt{\dfrac{2\pi\hbar\varepsilon}{-\mathrm{i}m}}$. 从而

$$U(x_a, x_b; T) = \left[1 - \frac{\mathrm{i}\varepsilon}{\hbar}V(x_b) + \frac{\mathrm{i}\varepsilon\hbar}{2m}\frac{\partial^2}{\partial x_b^2}\right] U(x_a, x_b; T-\varepsilon) \tag{9}$$

即

$$\mathrm{i}\hbar\frac{\partial}{\partial T}U(x_a, x_b; T) = \left[-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial x_b^2} + V(x_b)\right] U(x_a, x_b; T) \tag{10}$$

这就是 Schödinger 方程.

1.2 多自由度系统的路径积分

下面我们来考虑多自由度系统，它由 N 个广义坐标 $\{q^i\}$ 以及对应的正则动量 $\{p_i\}$ 描述. 把 T 分为长度为 ε 的小段，插入单位算符 $\mathbf{1}=\int \mathrm{d}q\ |q\rangle\langle q|$ 得

$$\begin{aligned} U(q_a,q_b;T) &= \langle q_b|\, e^{-\mathrm{i}HT}\,|q_a\rangle \\ &= \left(\int \mathrm{d}q_{N-1}\cdots\int \mathrm{d}q_1\right)\langle q_N|\, e^{-\mathrm{i}H\varepsilon}\,|q_{N-1}\rangle\cdots\langle q_1|\, e^{-\mathrm{i}H\varepsilon}\,|q_0\rangle \end{aligned} \tag{11}$$

其中 $q_N=q_b, q_0=q_a$. 问题转化为 $\langle q_{k+1}|\, e^{-\mathrm{i}H\varepsilon}\,|q_k\rangle$ 的计算.

若 H 只含 q

$$\begin{aligned} \langle q_{k+1}|\, f(q)\,|q_k\rangle &= f(q_k)\delta(q_k-q_{k+1}) \\ &= f\left(\frac{q_k+q_{k+1}}{2}\right)\left(\prod_i\int\frac{\mathrm{d}p_k^i}{2\pi}\right)\exp[\mathrm{i}p_k(q_{k+1}-q_k)] \end{aligned} \tag{12}$$

若 H 只含 p

$$\begin{aligned} \langle q_{k+1}|\, f(p)\,|q_k\rangle &= \left(\prod_i\int\frac{\mathrm{d}p_k^i}{2\pi}\right)\langle q_{k+1}|\, f(p)\,|p_k\rangle\langle p_k|q_k\rangle \\ &= \left(\prod_i\int\frac{\mathrm{d}p_k^i}{2\pi}\right) f(p_k)\exp[\mathrm{i}p_k(q_{k+1}-q_k)] \end{aligned} \tag{13}$$

H 含 p,q 的乘积的情况比较微妙. 等式左侧 p,q 是作为算符出现的，不可对易，p,q 的顺序是有影响的. 而在等式右侧，p,q 是作为数出现的，顺序无影响. 如何使得等式右侧为 $H\left(\frac{q_k+q_{k+1}}{2},p_k\right)$ 呢? 以 $H(x,y)=x^2y$ 为例，

$$H\left(\frac{q_k+q_{k+1}}{2},p_k\right)=\frac{1}{4}(q_{k+1}^2+q_k^2+2q_kq_{k+1})p_k \tag{14}$$

q_k^2 需要两个 q 作用在 $|q_k\rangle$ 上，所以 q 都在右边，同理 q_{k+1}^2 项对应两个 q 都在左边，q_kq_{k+1} 对应 p 两侧各一个 q. 于是等式左侧应当为

$$H(q,p)=\frac{1}{4}(q^2p+pq^2+2qpq) \tag{15}$$

我们称这种排序为 Weyl 排序. 对于任意 Hamilton 量，总能用对易关系把它变为 Weyl 排序的，故我们以后总认为 Hamilton 量已经是 Weyl 排序的. 从而

$$\langle q_{k+1}|e^{-\mathrm{i}\varepsilon H}\,|q_k\rangle=\left(\prod_i\int\frac{\mathrm{d}p_k^i}{2\pi}\right)\exp\left[-\mathrm{i}\varepsilon H\left(\frac{q_{k+1}+q_k}{2},p_k\right)\right]\exp[\mathrm{i}p_k(q_{k+1}-q_k)] \tag{16}$$

进而

$$\begin{aligned} U(q_a,q_b,T) &= \left(\prod_k\prod_{\mathrm{i}}\int\mathrm{d}q_k^{\mathrm{i}}\int\frac{\mathrm{d}p_k^i}{2\pi}\right)\exp\left\{\mathrm{i}\sum_k\left[p_k^i(q_{k+1}^i-q_k^i)-\varepsilon H\left(\frac{q_{k+1}+q_k}{2}\right)\right]\right\} \\ &\to \int\mathcal{D}q(t)\mathcal{D}p(t)\exp\left[\mathrm{i}\int_0^T\mathrm{d}t\left(\sum_i p^i\dot{q}^i-H\right)\right] \end{aligned}$$

2 标量场的路径积分

2.1 积去正则动量

对于场，$\mathbf{x}$ 取代 i 成为系统的自由度，q_i 和 p_j 分别替换为 $\phi(\mathbf{x})$ 和 $\pi(\mathbf{x})$. 从而场从 ϕ_a 演化到 ϕ_b 的概率幅

$$\langle\phi_b|\, e^{-\mathrm{i}HT}\,|\phi_a\rangle = \int_{\phi(x^0=0)=\phi_a}^{\phi(x^0=T)=\phi_b} \mathcal{D}\phi\mathcal{D}\pi \exp\left[\mathrm{i}\int_0^T \mathrm{d}t\left(\int \pi\dot{\phi}\,\mathrm{d}^3\mathbf{x} - H\right)\right] \tag{17}$$

当 H 是 π 的二次型时，我们可以先积去 $\pi(\mathbf{x})$. 以标量场为例，离散化之后，积分测度 $\displaystyle\int\mathcal{D}\pi = \prod_j\int \mathrm{d}\pi_j \sim \prod_j\prod_{\mathbf{x}}\int \mathrm{d}\pi_{j,\mathbf{x}}$（略去归一化常数），被积函数包含 π 的部分为

$$\exp\left\{\mathrm{i}\sum_j \delta t\sum_{\mathbf{x}}\varepsilon\left[\frac{\pi_{j,\mathbf{x}}(\phi_{j+1,\mathbf{x}}-\phi_{j,\mathbf{x}})}{\delta t} - \frac{1}{2}\pi_{j,\mathbf{x}}^2\right]\right\} \tag{18}$$

则

$$\begin{aligned}
&\int\mathcal{D}\pi\exp\left[\mathrm{i}\int_0^T\mathrm{d}t\int\mathrm{d}^3\mathbf{x}\left(-\frac{1}{2}\pi^2+\pi\dot{\phi}\right)\right]\\
&\sim\left(\prod_j\prod_{\mathbf{x}}\int\mathrm{d}\pi_{j,\mathbf{x}}\right)\exp\left\{\mathrm{i}\sum_j\sum_{\mathbf{x}}\varepsilon\left[-\frac{\mathrm{i}\delta t}{2}\pi_{j,\mathbf{x}}^2+\mathrm{i}\pi_{j,\mathbf{x}}(\phi_{j+1,\mathbf{x}}-\phi_{j,\mathbf{x}})\right]\right\}\\
&=\prod_j\prod_{\mathbf{x}}\left\{\int\mathrm{d}\pi_{j,\mathbf{x}}\exp\varepsilon\left[-\frac{\mathrm{i}\delta t}{2}\pi_{j,\mathbf{x}}^2+\mathrm{i}\pi_{j,\mathbf{x}}(\phi_{j+1,\mathbf{x}}-\phi_{j,\mathbf{x}})\right]\right\}\\
&\sim\prod_j\prod_{\mathbf{x}}\exp\frac{\mathrm{i}\varepsilon(\phi_{j+1,\mathbf{x}}-\phi_{j,\mathbf{x}})^2}{2\delta t}\\
&=\exp\left[\sum_j\delta t\sum_{\mathbf{x}}\varepsilon\frac{\mathrm{i}}{2}\left(\frac{\phi_{j+1,\mathbf{x}}-\phi_{j,\mathbf{x}}}{\delta t}\right)^2\right]\\
&\to\exp\left(\int\mathrm{d}t\mathrm{d}^3\mathbf{x}\frac{\mathrm{i}}{2}\dot{\phi}^2\right)
\end{aligned} \tag{19}$$

从而

$$\begin{aligned}
\langle\phi_b|\, e^{-\mathrm{i}HT}\,|\phi_a\rangle &= \int\mathcal{D}\phi\exp\left\{\mathrm{i}\int_0^T\mathrm{d}t\int\mathrm{d}^3\mathbf{x}\left[\frac{1}{2}\dot{\phi}^2-\frac{1}{2}(\nabla\phi)^2-V(\phi)\right]\right\}\\
&=\int\mathcal{D}\phi\exp\left[\mathrm{i}\int_0^T\mathrm{d}t\int\mathrm{d}^3\mathbf{x}\,\mathcal{L}\right]\\
&=\int\mathcal{D}\phi\, e^{\mathrm{i}S}
\end{aligned} \tag{20}$$

2.2 关联函数

我们可以对泛函积分作如下分解

$$\int\mathcal{D}\phi(x) = \int\mathcal{D}\phi_1(\mathbf{x})\int\mathcal{D}\phi_2(\mathbf{x})\int_{\phi(x_1^0,\mathbf{x})=\phi_1(\mathbf{x})}^{\phi(x_2^0,\mathbf{x})=\phi_2(\mathbf{x})}\mathcal{D}\phi(x) \tag{21}$$

也就是说，我们增加约束条件，要求 x_1^0 时刻的场位形为 $\phi_1(\mathbf{x})$ 而 x_2^0 时刻的场位形为 $\phi_2(\mathbf{x})$，先对满足此约束条件的路径进行积分，再约束中出现的两个场位形积分，就相当于对所有可能的路径进行积分. 从而

$$\begin{aligned}
&\int \mathcal{D}\phi(x)\phi(x_1)\phi(x_2)\exp\left(\mathrm{i}\int_{-T}^{T}\mathrm{d}t\int \mathrm{d}^3\mathbf{x}\,\mathcal{L}\right)\\
&=\int \mathcal{D}\phi_1(\mathbf{x})\int \mathcal{D}\phi_2(\mathbf{x})\int_{\phi(x_1^0,\mathbf{x})=\phi_1(\mathbf{x})}^{\phi(x_2^0,\mathbf{x})=\phi_2(\mathbf{x})}\mathcal{D}\phi(x)\phi(x_1)\phi(x_2)\exp\left(\mathrm{i}\int_{-T}^{T}\mathrm{d}t\int \mathrm{d}^3\mathbf{x}\,\mathcal{L}\right)\\
&=\int \mathcal{D}\phi_1(\mathbf{x})\phi_1(\mathbf{x}_1)\int \mathcal{D}\phi_2(\mathbf{x})\phi_2(\mathbf{x}_2)\int_{\phi(x_1^0,\mathbf{x})=\phi_1(\mathbf{x})}^{\phi(x_2^0,\mathbf{x})=\phi_2(\mathbf{x})}\mathcal{D}\phi(x)\exp\left(\mathrm{i}\int_{-T}^{T}\mathrm{d}t\int \mathrm{d}^3\mathbf{x}\,\mathcal{L}\right)\\
&\overset{x_1^0\le x_2^0}{=}\int \mathcal{D}\phi_1(\mathbf{x})\phi_1(\mathbf{x}_1)\int \mathcal{D}\phi_2(\mathbf{x})\phi_2(\mathbf{x}_2)\left\langle\phi_b\right|e^{-\mathrm{i}H(T-x_2^0)}\left|\phi_2\right\rangle\left\langle\phi_2\right|e^{-\mathrm{i}H(x_2^0-x_1^0)}\left|\phi_1\right\rangle\left\langle\phi_1\right|e^{-\mathrm{i}H(x_1^0+T)}\left|\phi_a\right\rangle\\
&=\left\langle\phi_b\right|e^{-\mathrm{i}H(T-x_2^0)}\phi_S(\mathbf{x}_2)e^{-\mathrm{i}H(x_2^0-x_1^0)}\phi_S(\mathbf{x}_1)e^{-\mathrm{i}H(x_1^0+T)}\left|\phi_a\right\rangle\\
&=\left\langle\phi_b\right|e^{-\mathrm{i}HT}\phi_H(x_2)\phi_H(x_1)e^{-\mathrm{i}HT}\left|\phi_a\right\rangle
\end{aligned}\tag{22}$$

其中我们用到了 $\phi_S(\mathbf{x})\left|\phi\right\rangle=\phi(\mathbf{x})\left|\phi\right\rangle$ 以及 $\int\mathcal{D}\phi(\mathbf{x})\left|\phi\right\rangle\left\langle\phi\right|=1$（在某时刻遍历场的所有可能位形，对应的场算符 ϕ 的本征态是完备基）. $x_1^0>x_2^0$ 的情况是类似的. 从而

$$\int \mathcal{D}\phi(x)\phi(x_1)\phi(x_2)\exp\left(\mathrm{i}\int_{-T}^{T}\mathrm{d}t\int \mathrm{d}^3\mathbf{x}\,\mathcal{L}\right)=\left\langle\phi_b\right|e^{-\mathrm{i}HT}T\{\phi_H(x_1)\phi_H(x_2)\}e^{-\mathrm{i}HT}\left|\phi_a\right\rangle\tag{23}$$

可以看到，编时算符在路径积分量子化中是自然出现的. 用与先前相同的技巧，可以得到两点关联函数

$$\left\langle\Omega\right|T\phi_H(x_1)\phi_H(x_2)\left|\Omega\right\rangle=\lim_{T\to\infty(1-\mathrm{i}\varepsilon)}\frac{\int\mathcal{D}\phi(x)\phi(x_1)\phi(x_2)\exp\left(\mathrm{i}\int_{-T}^{T}\mathrm{d}t\int\mathrm{d}^3\mathbf{x}\,\mathcal{L}\right)}{\int\mathcal{D}\phi(x)\exp\left(\mathrm{i}\int_{-T}^{T}\mathrm{d}t\int\mathrm{d}^3\mathbf{x}\,\mathcal{L}\right)}\tag{24}$$

2.3 生成泛函

生成泛函是指

$$Z[J]=\int\mathcal{D}\phi\exp\left\{\mathrm{i}\int\mathrm{d}^4x[\mathcal{L}+J(x)\phi(x)]\right\}\tag{25}$$

其中 $J(x)\phi(x)$ 称为源项. 泛函导数的基本运算法则为

$$\frac{\delta}{\delta J(x)}J(y)=\delta^{(4)}(x-y)\quad\frac{\delta}{\delta J(x)}\int\mathrm{d}^4yJ(y)\phi(y)=\phi(x)\tag{26}$$

复合泛函的泛函导数遵循链式法则，如

$$\begin{aligned}
\frac{\delta}{\delta J(x)}\exp\left[\mathrm{i}\int\mathrm{d}^4y\,J(y)\phi(y)\right]&=\frac{\delta}{\delta J(x)}\exp\left[\mathrm{i}\int\mathrm{d}^4y\,J(y)\phi(y)\right]\frac{\delta}{\delta J(x)}\left[\mathrm{i}\int\mathrm{d}^4y\,J(y)\phi(y)\right]\\
&=\mathrm{i}\phi(x)\exp\left[\mathrm{i}\int\mathrm{d}^4y\,J(y)\phi(y)\right]
\end{aligned}\tag{27}$$

泛函中含有 J 的导数时，先分部积分，再求泛函导数，如

$$\frac{\delta}{\delta J(x)}\int\mathrm{d}^4y\,\partial_\mu J(y)V^\mu(y)=-\partial_\mu V^\mu(x)\tag{28}$$

由运算法则，可推出

$$\left\langle0\right|T\phi(x_1)\phi(x_2)\left|0\right\rangle=\frac{1}{Z_0}\left[-\mathrm{i}\frac{\delta}{\delta J(x_1)}\right]\left[-\mathrm{i}\frac{\delta}{\delta J(x_2)}\right]Z[J]\Big|_{J=0}\tag{29}$$

类似地

$$(-\mathrm{i})^n\frac{1}{Z[0]}\frac{\partial^nZ}{\partial J(x_1)\cdots\partial J(x_n)}\Big|_{J=0}=\langle\Omega|T\{\hat{\phi}(x_1)\cdots\hat{\phi}(x_n)\}|\Omega\rangle\tag{30}$$

对于实标量场，拉格朗日量为

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{2}\phi(\Box + m^2)\phi \tag{31}$$

自由理论中的生成泛函定义为

$$Z_0[J] = \int \mathcal{D}\phi \, \exp\left\{ \mathrm{i} \int d^4x \left[-\frac{1}{2}\phi(\Box + m^2)\phi + J(x)\phi(x) \right] \right\} \tag{32}$$

由于积分是高斯型的，可精确求解. 利用

$$\int d^3p \, e^{-\frac{1}{2}p^2A^2} p^2 = \sqrt{\frac{(2\pi)^n}{\det A}} \, e^{\frac{1}{2}J^2A^{-1}J} \tag{33}$$

其中 $A = \mathrm{i}(\Box + m^2)$. 逆算子 A^{-1} 由函数 $\Pi(x-y)$ 表示，满足

$$(\Box + m^2)\Pi(x-y) = -\delta(x-y) \tag{34}$$

其解为

$$\Pi(x-y) = \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \frac{1}{p^2 - m^2} e^{\mathrm{i}p(x-y)} \tag{35}$$

因此

$$Z_0[J] = N \exp\left\{ -i \int d^4x \int d^4y \, \frac{1}{2} J(x)\Pi(x-y)J(y) \right\} \tag{36}$$

由此可得到自由场的两点编时乘积

$$\langle 0|T\{\hat{\phi}_0(x)\hat{\phi}_0(y)\}|0\rangle = (-\mathrm{i})^2 \frac{1}{Z_0[0]} \frac{\partial^2 Z_0[J]}{\partial J(x)\partial J(y)}\bigg|_{J=0} = \mathrm{i}\Pi(x-y) = \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \frac{\mathrm{i}}{p^2 - m^2} e^{ip(x-y)} \tag{37}$$

这是不含 $i\varepsilon$ 的 Feynman 传播子（$i\varepsilon$ 将在后续讨论中加入）.

自由理论中的四点编时乘积为

$$\langle 0|T\{\hat{\phi}_0(x_1)\hat{\phi}_0(x_2)\hat{\phi}_0(x_3)\hat{\phi}_0(x_4)\}|0\rangle = (-\mathrm{i})^4 \frac{1}{Z_0[0]} \frac{\partial^4 Z_0}{\partial J(x_1)\cdots\partial J(x_4)}\bigg|_{J=0} \tag{38}$$

利用简写记号 $J_i \equiv J(x_i)$，$D_{xy} \equiv D_F(x-y)$，有

$$\frac{\partial^4}{\partial J_1 \partial J_2 \partial J_3 \partial J_4} e^{-\frac{1}{2}J_x D_{xy} J_y}\bigg|_{J=0} = D_{34}D_{12} + D_{23}D_{14} + D_{13}D_{24} \tag{39}$$

这正好对应 Wick 定理给出的所有配对求和.

2.4 相互作用

考虑相互作用拉格朗日量

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{2}\phi(\Box + m^2)\phi + \frac{g}{3!}\phi^3 \tag{40}$$

生成泛函为

$$Z[J] = \int \mathcal{D}\phi \, e^{i\int d^4x \left[\frac{1}{2}\phi(-\Box - m^2)\phi + J\phi + \frac{g}{3!}\phi^3\right]}. \tag{41}$$

将相互作用项按耦合常数展开

$$Z[J] = \int \mathcal{D}\phi \, e^{i\int d^4x \left[\frac{1}{2}\phi(-\Box - m^2)\phi + J\phi\right]} \left[1 + \frac{\mathrm{i}g}{3!}\int d^4z \, \phi^3(z) + \left(\frac{\mathrm{i}g}{3!}\right)^2 \frac{1}{2}\int d^4z d^4w \, \phi^3(z)\phi^3(w) + \cdots \right] \tag{42}$$

利用自由理论中的关系

$$\phi(z) e^{\mathrm{i}\int(\mathcal{L}_0 + J\phi)} \longleftrightarrow (-\mathrm{i}) \frac{\delta}{\delta J(z)} Z_0[J] \tag{43}$$

可将上式写为

$$Z[J] = Z_0[J] + \frac{ig}{3!}\int d^4z \, (-\mathrm{i})^3 \frac{\partial^3 Z_0[J]}{(\partial J(z))^3} + \left(\frac{\mathrm{i}g}{3!}\right)^2 \frac{1}{2}\int d^4z d^4w \, (-\mathrm{i})^6 \frac{\partial^6 Z_0[J]}{(\partial J(z))^3 (\partial J(w))^3} + \cdots . \tag{44}$$

这是路径积分形式下的费曼规则展开.

对 $Z[J]$ 取两次泛函导数并除以 $Z[0]$，得到相互作用理论中的两点编时乘积

$$\langle\Omega|T\{\hat{\phi}(x_1)\hat{\phi}(x_2)\}|\Omega\rangle = \frac{Z_0[0]}{Z[0]}\langle 0|T\{\hat{\phi}_0(x_1)\hat{\phi}_0(x_2)\}|0\rangle + \frac{\mathrm{i}gZ_0[0]}{3!Z[0]}\int d^4z\,\langle 0|T\{\hat{\phi}_0(x_1)\hat{\phi}_0(x_2)\hat{\phi}_0(z)^3\}|0\rangle + \cdots \tag{45}$$

将其写成紧凑形式

$$\langle\Omega|T\{\hat{\phi}(x_1)\hat{\phi}(x_2)\}|\Omega\rangle = \frac{\langle 0|T\{\hat{\phi}_0(x_1)\hat{\phi}_0(x_2)e^{\mathrm{i}\int d^4z\,\frac{g}{3!}\hat{\phi}_0(z)^3}\}|0\rangle}{\langle 0|T\{e^{\mathrm{i}\int d^4z\,\frac{g}{3!}\hat{\phi}_0(z)^3}\}|0\rangle} \tag{46}$$

我们从路径积分中重现了 Feynman 规则.

3 矢量场的路径积分

对于无质量自旋 1 粒子，拉格朗日量为

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}^2 + J^\mu A_\mu \tag{47}$$

由此可得动量空间中的运动方程

$$(k^2 g_{\mu\nu} - k_\mu k_\nu)A^\nu = J_\mu \tag{48}$$

该算符不可逆，因为其行列式为零，具有零本征矢量 k_μ. 物理上，不可逆性源于规范不变性，给定流 J_μ 无法唯一确定 A_μ，因为

$$A_\mu \to A_\mu + \partial_\mu\alpha(x) \tag{49}$$

保持物理状态不变.

为解决这一问题，可在拉格朗日量中添加规范固定项 $\dfrac{1}{2\xi}(\partial^\mu A_\mu)^2$，变为

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}^2 + J^\mu A_\mu + \frac{1}{2\xi}(\partial^\mu A_\mu)^2 \tag{50}$$

下面我们论证，对于任意规范不变的场集合 $\mathcal{O}(x_1,\ldots,x_n)$，关联函数

$$\langle\Omega|T\{\mathcal{O}(x_1,\ldots,x_n)\}|\Omega\rangle = \frac{1}{Z}\int \mathcal{D}A_\mu\mathcal{D}\phi_i\mathcal{D}\phi_i^*\,e^{\mathrm{i}\int d^4x\,\mathcal{L}[A_\mu,\phi_i]}\,\mathcal{O}(x_1,\ldots,x_n) \tag{51}$$

与规范固定参数 ξ 无关.

考虑函数

$$f(\xi) = \int \mathcal{D}\pi\,e^{-\mathrm{i}\int d^4x\,\frac{1}{2\xi}(\Box\pi)^2} \tag{52}$$

对场做平移

$$\pi(x) \to \pi(x) - \alpha(x) = \pi(x) - \frac{1}{2\xi}\partial^\mu A_\mu \tag{53}$$

积分测度平移不变，于是得到

$$f(\xi) = \int \mathcal{D}\pi\,e^{-\mathrm{i}\int d^4x\,\frac{1}{2\xi}(\Box\pi-\partial^\mu A_\mu)^2} \tag{54}$$

这仅是 ξ 的函数，尽管看起来与 A^μ 有关（A^μ 没有被积去）.

用 $f(\xi)$ 的两种形式对关联函数进行乘除运算，得

$$\langle\Omega|T\{\mathcal{O}\}|\Omega\rangle = \frac{1}{Z_0}\frac{1}{f(\xi)}\int \mathcal{D}\pi\mathcal{D}A_\mu\mathcal{D}\phi_i\mathcal{D}\phi_i^*\,e^{\mathrm{i}\int d^4x\left[\mathcal{L}[A,\phi_i]-\frac{1}{2\xi}(\Box\pi-\partial^\mu A_\mu)^2\right]}\mathcal{O} \tag{55}$$

采用 Stueckelberg 技巧，以 $\pi(x)$ 为规范参数做规范变换

$$A_\mu = A'_\mu + \partial_\mu\pi, \qquad \phi_i = e^{i\pi}\phi'_i \tag{56}$$

积分测度、作用量以及规范不变的算符 $\mathcal{O}$ 均不变. 于是得到

$$\langle\Omega|T\{\mathcal{O}\}|\Omega\rangle = \frac{1}{Z_0}\frac{1}{f(\xi)}\int \mathcal{D}\pi \int \mathcal{D}A_\mu \mathcal{D}\phi_i \mathcal{D}\phi_i^*\, e^{i\int d^4x\left[\mathcal{L}[A,\phi_i]-\frac{1}{2\xi}(\partial^\mu A_\mu)^2\right]}\mathcal{O} \tag{57}$$

对 $Z[0]$ 进行相同操作，得到相同的归一化因子

$$Z[0] = \int \frac{1}{f(\xi)}\mathcal{D}\pi \int \mathcal{D}A_\mu \mathcal{D}\phi_i \mathcal{D}\phi_i^*\, e^{\mathrm{i}\int d^4x\left[\mathcal{L}[A,\phi_i]-\frac{1}{2\xi}(\partial^\mu A_\mu)^2\right]} \tag{58}$$

归一化因子相消后，得

$$\langle\Omega|T\{\mathcal{O}\}|\Omega\rangle = \frac{\displaystyle\int \mathcal{D}A_\mu \mathcal{D}\phi_i \mathcal{D}\phi_i^*\, e^{\mathrm{i}\int d^4x\left[\mathcal{L}[A,\phi_i]-\frac{1}{2\xi}(\partial^\mu A_\mu)^2\right]}\mathcal{O}}{\displaystyle\int \mathcal{D}A_\mu \mathcal{D}\phi_i \mathcal{D}\phi_i^*\, e^{\mathrm{i}\int d^4x\left[\mathcal{L}[A,\phi_i]-\frac{1}{2\xi}(\partial^\mu A_\mu)^2\right]}} \tag{59}$$

等式右侧是用规范固定的拉格朗日量算出的关联函数. 这表明，用规范固定的拉格朗日量计算的规范不变算符的关联函数与 ξ 完全无关.

4 费米子路径积分

4.1 Grassmann 代数

Grassmann 代数是由 n 个生成元 θ_i 张成的向量空间，其上定义反对称乘法

$$\theta_i\theta_j + \theta_j\theta_i = 0 \tag{60}$$

因此一般元素为生成元的多项式

$$f(\theta_i) = \sum_{k=0}^{n}\sum_{i_1,\ldots,i_k} c^{(k)}_{i_1\ldots i_k}\theta_{i_1}\theta_{i_2}\cdots\theta_{i_k} \tag{61}$$

其中系数仅在指标互不相同时有定义，并按标准顺序排列. 代数的维数为 2^n.

例如，$n=1$ 和 $n=2$ 的一般元素分别为

$$f(\theta) = c_0 + c_1\theta \tag{62}$$

和

$$f(\theta_1,\theta_2) = c_0 + c_1\theta_1 + c_2\theta_2 + c_{12}\theta_1\theta_2 \tag{63}$$

4.2 微分与积分

Grassmann 变量上的微分定义为将微分变量移至最左侧后再求导

$$\mathrm{d}f = \sum_i \mathrm{d}\theta_i \frac{\partial f}{\partial\theta_i} \tag{64}$$

例如

$$\frac{\partial f}{\partial\theta_2} = c_2 - c_{12}\theta_1 \tag{65}$$

微分算符 $\dfrac{\partial}{\partial\theta_i}$ 是幂零的，且与 Grassmann 变量构成 Clifford 代数

$$\theta_i\theta_j + \theta_j\theta_i = 0 \tag{66}$$

$$\frac{\partial}{\partial\theta_i}\frac{\partial}{\partial\theta_j} + \frac{\partial}{\partial\theta_j}\frac{\partial}{\partial\theta_i} = 0 \tag{67}$$

$$\theta_i\frac{\partial}{\partial\theta_j} + \frac{\partial}{\partial\theta_j}\theta_i = \delta_{ij} \tag{68}$$

Grassmann 变量的积分定义为与微分相同

$$\int \mathrm{d}\theta_1 \, f(\theta_1, \ldots, \theta_n) = \frac{\partial}{\partial \theta_1} f(\theta_1, \ldots, \theta_n) \tag{69}$$

该定义保证积分与微分可交换，且积分结果不含积分变量

$$\frac{\partial}{\partial \theta_i} \int \mathrm{d}\theta_j \, f(\theta) = \int \mathrm{d}\theta_j \, \frac{\partial f}{\partial \theta_i} = 0 \tag{70}$$

多个变量的积分给出展开式中最高次项的系数

$$\int \mathrm{d}\theta_1 \cdots \mathrm{d}\theta_n \, f(\theta_1, \ldots, \theta_n) = c^{(n)}_{1\cdots n} \tag{71}$$

变量变换下积分测度按逆 Jacobian 变换

$$\mathrm{d}\theta'_1 \cdots \mathrm{d}\theta'_n = \left| \frac{\partial \theta'}{\partial \theta} \right|^{-1} \mathrm{d}\theta_1 \cdots \mathrm{d}\theta_n \tag{72}$$

该结果直接来自“积分等同于微分”的定义.

4.3 Grassmann 高斯积分

考虑反对称矩阵 A（偶数维 n）的 Gaussian 积分

$$I = \int \mathrm{d}\theta_1 \cdots \mathrm{d}\theta_n \, \exp\left(-\frac{1}{2} \theta^T A \theta \right) \tag{73}$$

展开指数后只有包含每个变量一次的项有贡献，结果为

$$I = \sum_{p \in S_n} \varepsilon(p) A_{p(1)p(2)} A_{p(3)p(4)} \cdots A_{p(n-1)p(n)} \tag{74}$$

其中 $\varepsilon(p)$ 为置换符号，并满足排序约束

$$p(1) < p(2), \quad p(3) < p(4), \quad \ldots, \quad p(1) < p(3) < p(5) < \cdots \tag{75}$$

此表达式称为矩阵 A 的 Pfaffian，记为 $\mathrm{Pf}(A)$，满足

$$\mathrm{Pf}(A)^2 = \det A \tag{76}$$

对于复 Grassmann 变量 $\bar{\theta}_i, \theta_i$，积分

$$I = \int [\mathrm{d}\bar{\theta} \, \mathrm{d}\theta] \, e^{-\bar{\theta} M \theta} \tag{77}$$

其中 $[\mathrm{d}\bar{\theta} \, \mathrm{d}\theta] = \prod_i \mathrm{d}\bar{\theta}_i \mathrm{d}\theta_i$，展开后得

$$I = \sum_{p \in S_n} \varepsilon(p) M_{p(1)1} M_{p(2)2} \cdots M_{p(n)n} = \det M \tag{78}$$

其中 M 是任意 $n \times n$ 复矩阵. 这一结果源于指数展开后，只有包含每个变量恰好一次的项贡献，求和得到行列式.

与此相对，普通（玻色子）高斯积分给出

$$\int \mathrm{d}^n x \, e^{-\frac{1}{2} x^T A x} = \sqrt{\frac{(2\pi)^n}{\det A}} \tag{79}$$

可见行列式在分子与分母上的差异，这是费米子路径积分的关键特点.

引入外源 $\bar{\eta}_i, \eta_i$ 后，有

$$\int \mathrm{d}\bar{\theta} \mathrm{d}\theta \, \exp\left(-\bar{\theta} A \theta + \bar{\eta} \theta + \bar{\theta} \eta \right) = \det A \, \exp\left(\bar{\eta} A^{-1} \eta \right) \tag{80}$$

该式通过平移 $\theta \to \theta + A^{-1}\eta$ 得到，由于 Grassmann 变量的反对易性，源项指数中 $\bar{\eta}$ 与 η 的次序已按约定排序.

将离散指标 i 替换为连续时空点 x，Grassmann 变量变为旋量场 $\psi(x)$ 和 $\bar{\psi}(x)$. 路径积分为

$$Z[\bar{\eta},\eta]=\int\mathcal{D}\bar{\psi}\mathcal{D}\psi\,\exp\left\{i\int\mathrm{d}^4x\,\bar{\psi}(x)(i\partial\!\!\!/-m)\psi(x)+\bar{\eta}\psi+\bar{\psi}\eta\right\} \tag{81}$$

其中 $i\partial\!\!\!/-m$ 是 Dirac 算符. 形式上，这是高斯积分，其结果为

$$Z[\bar{\eta},\eta]=\mathcal{N}\exp\left\{-i\int\mathrm{d}^4x\,\mathrm{d}^4y\,\bar{\eta}(x)S_F(x-y)\eta(y)\right\} \tag{82}$$

其中 $\mathcal{N}=\det(i\partial\!\!\!/-m)$ 为无穷大常数

$$S_F(x-y)=(\mathrm{i}\partial\!\!\!/-m)^{-1}=\int\frac{\mathrm{d}^4p}{(2\pi)^4}\frac{\mathrm{i}(\not{p}+m)}{p^2-m^2+i\varepsilon}e^{-\mathrm{i}p(x-y)} \tag{83}$$

$S_F(x-y)$ 是费米子传播子. 自由理论中的两点编时乘积由泛函导数给出

$$\langle0|T\{\psi(x)\bar{\psi}(y)\}|0\rangle=\frac{1}{Z[0]}\left.\frac{\partial^2Z[\bar{\eta},\eta]}{\partial\bar{\eta}(x)\partial\eta(y)}\right|_{\eta=\bar{\eta}=0}=\mathrm{i}S_F(x-y) \tag{84}$$

5 路径积分中的运动方程、守恒律与 Ward-Takahashi 恒等式

路径积分形式不仅提供了计算关联函数的系统工具，而且能直接导出量子化的运动方程和守恒律，无需构造 Hamiltonian 或引入正则对易关系. 其核心思想是：将场变量的平移或对称变换视为积分变量的重新定义，利用积分测度的不变性导出含接触项的量子恒等式. 这些恒等式统一了经典 Noether 定理与量子修正，是理解量子场论对称性及其物理后果的关键.

5.1 量子运动方程与 Schwinger-Dyson 方程

以自由实标量场为例，其拉格朗日量为

$$\mathcal{L}=\frac{1}{2}(\partial_\mu\phi)^2-\frac{1}{2}m^2\phi^2 \tag{85}$$

考虑三点编时关联函数

$$\langle\Omega|T\phi(x_1)\phi(x_2)\phi(x_3)|\Omega\rangle=Z^{-1}\int\mathcal{D}\phi\,e^{\mathrm{i}\int\mathrm{d}^4x\,\mathcal{L}[\phi]}\phi(x_1)\phi(x_2)\phi(x_3) \tag{86}$$

其中 $Z=\displaystyle\int\mathcal{D}\phi\,e^{\mathrm{i}\int\mathrm{d}^4x\,\mathcal{L}[\phi]}$ 是归一化因子.

对积分变量做任意平移

$$\phi(x)\to\phi'(x)=\phi(x)+\varepsilon(x) \tag{87}$$

其中 $\varepsilon(x)$ 是任意无穷小函数. 由于平移不改变积分测度（$\mathcal{D}\phi'=\mathcal{D}\phi$），且积分值是常数，因此新旧积分相等：

$$\int\mathcal{D}\phi\,e^{\mathrm{i}\int\mathrm{d}^4x\,\mathcal{L}[\phi]}\phi(x_1)\phi(x_2)\phi(x_3)=\int\mathcal{D}\phi\,e^{\mathrm{i}\int\mathrm{d}^4x\,\mathcal{L}[\phi']}\phi'(x_1)\phi'(x_2)\phi'(x_3) \tag{88}$$

将右端展开至 ε 的一阶. 首先，作用量变分为

$$\int\mathrm{d}^4x\,\mathcal{L}[\phi+\varepsilon]=\int\mathrm{d}^4x\,\mathcal{L}[\phi]+\int\mathrm{d}^4x\,\varepsilon(x)(-\partial^2-m^2)\phi(x)+\mathcal{O}(\varepsilon^2) \tag{89}$$

这是因为 $\mathcal{L}$ 对 ϕ 的变分导数是 Klein-Gordon 算符作用在 ϕ 上. 其次，被积函数中的场因子变为

$$\phi'(x_1)\phi'(x_2)\phi'(x_3)=\big(\phi(x_1)+\varepsilon(x_1)\big)\big(\phi(x_2)+\varepsilon(x_2)\big)\big(\phi(x_3)+\varepsilon(x_3)\big) \tag{90}$$

展开至一阶，得

$$\phi(x_1)\phi(x_2)\phi(x_3)+\varepsilon(x_1)\phi(x_2)\phi(x_3)+\phi(x_1)\varepsilon(x_2)\phi(x_3)+\phi(x_1)\phi(x_2)\varepsilon(x_3) \tag{91}$$

将这两部分合并，并利用等式两边相等，得到

$$0=\int \mathcal{D}\phi\, e^{\mathrm{i}\int \mathrm{d}^4x\,\mathcal{L}}\left[\mathrm{i}\int \mathrm{d}^4x\,\varepsilon(x)(-\partial^2-m^2)\phi(x)\,\phi(x_1)\phi(x_2)\phi(x_3)\right.$$
$$\left.+\varepsilon(x_1)\phi(x_2)\phi(x_3)+\phi(x_1)\varepsilon(x_2)\phi(x_3)+\phi(x_1)\phi(x_2)\varepsilon(x_3)\right] \tag{92}$$

将 $\varepsilon(x_i)$ 表示为积分形式

$$\varepsilon(x_i)=\int \mathrm{d}^4x\,\varepsilon(x)\delta(x-x_i) \tag{93}$$

代入上式，并重新排列各项，将所有含 $\varepsilon(x)$ 的项合并，得

$$0=\int \mathcal{D}\phi\, e^{\mathrm{i}\int \mathrm{d}^4x\,\mathcal{L}}\int \mathrm{d}^4x\,\varepsilon(x)\Big[i(-\partial^2-m^2)\phi(x)\,\phi(x_1)\phi(x_2)\phi(x_3)+\delta(x-x_1)\phi(x_2)\phi(x_3)$$
$$+\phi(x_1)\delta(x-x_2)\phi(x_3)+\phi(x_1)\phi(x_2)\delta(x-x_3)\Big] \tag{94}$$

由于 $\varepsilon(x)$ 任意，可令其系数为零（在泛函积分意义下）. 移项并将 i 因子调整，得到

$$0=\int \mathcal{D}\phi\, e^{\mathrm{i}\int \mathrm{d}^4x\,\mathcal{L}}\Big[(\partial^2+m^2)\phi(x)\,\phi(x_1)\phi(x_2)\phi(x_3)+\mathrm{i}\delta(x-x_1)\phi(x_2)\phi(x_3)$$
$$+i\phi(x_1)\delta(x-x_2)\phi(x_3)+i\phi(x_1)\phi(x_2)\delta(x-x_3)\Big] \tag{95}$$

取 $n=1$，即只有两个场 $\phi(x)$ 和 $\phi(x_1)$，则上式变为

$$0=\int \mathcal{D}\phi\, e^{\mathrm{i}\int \mathrm{d}^4x\,\mathcal{L}}\Big[(\partial^2+m^2)\phi(x)\,\phi(x_1)+\mathrm{i}\delta(x-x_1)\Big] \tag{96}$$

除以 Z，得

$$(\partial^2+m^2)\langle\Omega|T\phi(x)\phi(x_1)|\Omega\rangle=-\mathrm{i}\delta(x-x_1) \tag{97}$$

这是 Feynman 传播子作为 Klein-Gordon 算符的 Green 函数所满足的方程. 在 $x\neq x_1$ 时，它退化为齐次 Klein-Gordon 方程.

对于任意 $n+1$ 点函数，上述推导直接推广为

$$(\partial^2+m^2)\langle\Omega|T\phi(x)\phi(x_1)\cdots\phi(x_n)|\Omega\rangle=\sum_{i=1}^{n}\langle\Omega|T\phi(x_1)\cdots(-\mathrm{i}\delta(x-x_i))\cdots\phi(x_n)|\Omega\rangle \tag{98}$$

右端每一项表示当 x 与某个 x_i 重合时产生的接触项，这些项源自时间编序算符与微分算符的非对易性.

对于任意场 $\varphi(x)$ 和拉格朗日量 $\mathcal{L}[\varphi]$，将平移 $\varphi\to\varphi+\varepsilon$ 应用于路径积分，并利用泛函导数公式

$$\frac{\delta}{\delta\varphi(x)}\int \mathrm{d}^4x'\,\mathcal{L}=\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\varphi}-\partial_\mu\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\varphi)}\right) \tag{99}$$

可以得到一般形式的 Schwinger-Dyson 方程：

$$\left\langle\left(\frac{\delta}{\delta\varphi(x)}\int \mathrm{d}^4x'\,\mathcal{L}\right)\varphi(x_1)\cdots\varphi(x_n)\right\rangle=\sum_{i=1}^{n}\langle\varphi(x_1)\cdots\mathrm{i}\delta(x-x_i)\cdots\varphi(x_n)\rangle \tag{100}$$

其中左端的变分导数是经典 Euler-Lagrange 运动方程的左端. 因此，该方程表明：在量子场论中，场的编时关联函数满足经典运动方程，但须加上由时间编序产生的接触项. 这些接触项完全确定了量子修正.

5.2 守恒律：Noether 定理的量子推广

经典 Noether 定理指出，拉格朗日量的连续对称性对应一个守恒流. 在路径积分中，我们可以将对称参数取为时空函数，然后对路径积分做变量变换. 由于测度不变，积分值不变，从而得到含接触项的流守恒方程，它是经典守恒律的量子版本.

考虑复标量场理论，拉格朗日量为

$$\mathcal{L}=|\partial_\mu\phi|^2-m^2|\phi|^2 \tag{101}$$

它具有整体 $U(1)$ 对称性：$\phi \to e^{\mathrm{i}\alpha}\phi$. 将参数 α 取为时空函数 $\alpha(x)$，考虑无穷小变换

$$\phi(x) \to \phi'(x) = \phi(x) + \mathrm{i}\alpha(x)\phi(x), \qquad \phi^*(x) \to \phi'^*(x) = \phi^*(x) - \mathrm{i}\alpha(x)\phi^*(x) \tag{102}$$

这是一个幺正变换，因此路径积分测度不变.

计算 $\mathcal{L}[\phi']$ 至 α 一阶. 由于常数 α 时不变，变分只来自 $\partial_\mu\alpha$ 项. 具体地，

$$\mathcal{L}[\phi'] = \mathcal{L}[\phi] + (\partial_\mu\alpha)\cdot i\big(\phi\partial^\mu\phi^* - \phi^*\partial^\mu\phi\big) + \mathcal{O}(\alpha^2) \tag{103}$$

其中 $i(\phi\partial^\mu\phi^* - \phi^*\partial^\mu\phi)$ 是 Noether 流 j^μ.

取两点函数 $\phi(x_1)\phi^*(x_2)$，在变量变换下积分值不变：

$$\int \mathcal{D}\phi\, e^{\mathrm{i}\int \mathrm{d}^4x\,\mathcal{L}[\phi]}\phi(x_1)\phi^*(x_2) = \int \mathcal{D}\phi\, e^{\mathrm{i}\int \mathrm{d}^4x\,\mathcal{L}[\phi']}\phi'(x_1)\phi'^*(x_2) \tag{104}$$

展开至 α 一阶，得到

$$0 = \int \mathcal{D}\phi\, e^{\mathrm{i}\int \mathrm{d}^4x\,\mathcal{L}}\left[\mathrm{i}\int \mathrm{d}^4x\,(\partial_\mu\alpha)j^\mu(x)\,\phi(x_1)\phi^*(x_2) + \mathrm{i}\alpha(x_1)\phi(x_1)\phi^*(x_2) - \mathrm{i}\alpha(x_2)\phi(x_1)\phi^*(x_2)\right] \tag{105}$$

其中最后两项来自场的变换，$\phi'(x_1) = \phi(x_1) + \mathrm{i}\alpha(x_1)\phi(x_1)$，$\phi'^*(x_2) = \phi^*(x_2) - \mathrm{i}\alpha(x_2)\phi^*(x_2)$.

将含 $\partial_\mu\alpha$ 的项分部积分，得

$$\int \mathrm{d}^4x\,(\partial_\mu\alpha)j^\mu = -\int \mathrm{d}^4x\,\alpha(x)\partial_\mu j^\mu(x) \tag{106}$$

（边界项为零）. 于是上式为

$$0 = \int \mathcal{D}\phi\, e^{\mathrm{i}\int \mathrm{d}^4x\,\mathcal{L}}\int \mathrm{d}^4x\,\alpha(x)\left[-i\partial_\mu j^\mu(x)\phi(x_1)\phi^*(x_2) + \mathrm{i}\delta(x-x_1)\phi(x_1)\phi^*(x_2) - \mathrm{i}\delta(x-x_2)\phi(x_1)\phi^*(x_2)\right] \tag{107}$$

令 $\alpha(x)$ 任意，并除以 Z，得

$$\langle\partial_\mu j^\mu(x)\phi(x_1)\phi^*(x_2)\rangle = (-\mathrm{i})\left[\langle i\phi(x_1)\delta(x-x_1)\phi^*(x_2)\rangle + \langle\phi(x_1)(-i\phi^*(x_2)\delta(x-x_2))\rangle\right] \tag{108}$$

即

$$\langle\partial_\mu j^\mu(x)\phi(x_1)\phi^*(x_2)\rangle = (-\mathrm{i})\left[\mathrm{i}\delta(x-x_1)\langle\phi(x_1)\phi^*(x_2)\rangle - \mathrm{i}\delta(x-x_2)\langle\phi(x_1)\phi^*(x_2)\rangle\right] \tag{109}$$

其中 $j^\mu = \mathrm{i}(\phi\partial^\mu\phi^* - \phi^*\partial^\mu\phi)$.

设理论具有一组场 φ_a，在无穷小对称变换下

$$\varphi_a(x) \to \varphi_a(x) + \varepsilon\Delta\varphi_a(x) \tag{110}$$

且拉格朗日量在常数 ε 下不变（可能差一个全散度 $\partial_\mu\mathcal{J}^\mu$）. 当 $\varepsilon = \varepsilon(x)$ 时，拉格朗日量的变分为

$$\mathcal{L} \to \mathcal{L} + (\partial_\mu\varepsilon)\Delta\varphi_a\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\varphi_a)} + \varepsilon\partial_\mu\mathcal{J}^\mu \tag{111}$$

Noether 流为

$$j^\mu = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\varphi_a)}\Delta\varphi_a - \mathcal{J}^\mu \tag{112}$$

重复上述推导，得到一般恒等式

$$\langle\partial_\mu j^\mu(x)\varphi_{a_1}(x_1)\cdots\varphi_{a_n}(x_n)\rangle = (-\mathrm{i})\sum_{i=1}^{n}\langle\varphi_{a_1}(x_1)\cdots(\Delta\varphi_{a_i}(x_i)\delta(x-x_i))\cdots\varphi_{a_n}(x_n)\rangle \tag{113}$$

其中 $\Delta\varphi_{a_i}$ 是第 i 个场在对称变换下的变化量. 该式是经典流守恒方程 $\partial_\mu j^\mu = 0$ 的量子版本，右端为接触项.

作为应用，考虑时空平移对称性. 取变换

$$\varphi_a(x) \to \varphi_a(x) + a^\mu(x)\partial_\mu\varphi_a(x) \tag{114}$$

其中 $a^\mu(x)$ 为局域平移参数. 拉格朗日量的变分给出

$$\mathcal{L} \to \mathcal{L} + \partial_\nu a^\mu\partial_\mu\varphi_a\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\nu\varphi_a)} + a^\mu\partial_\mu\mathcal{L} \tag{115}$$

由此可得 Noether 流为能动量张量

$$T^{\mu\nu} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\nu \varphi_a)} \partial^\mu \varphi_a - g^{\mu\nu}\mathcal{L} \tag{116}$$

并且恒等式给出 $\partial_\nu T^{\mu\nu} = 0$ 加上接触项. 这体现了时空平移对称性对应的能量-动量守恒.

5.3 QED 中的 Ward-Takahashi 恒等式

将上述方法直接应用于 QED. QED 的拉格朗日量为

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \bar{\psi}(i\partial\!\!\!/ - m)\psi - e\bar{\psi}\gamma^\mu\psi A_\mu \tag{117}$$

它整体上在 $U(1)$ 变换 $\psi \to e^{\mathrm{i}e\alpha}\psi$（同时 A_μ 不变）下不变，对应的守恒流为电磁流 $j^\mu = e\bar{\psi}\gamma^\mu\psi$.

将 α 取为时空函数，考虑变换

$$\psi(x) \to (1 + \mathrm{i}e\alpha(x))\psi(x), \qquad \bar{\psi}(x) \to (1 - \mathrm{i}e\alpha(x))\bar{\psi}(x) \tag{118}$$

而光子场 A_μ 不变（这与规范变换不同，因为我们不改变 A_μ）. 此时拉格朗日量的变分（在常数 α 下不变，但在局域时出现 $\partial_\mu\alpha$ 项）为

$$\mathcal{L} \to \mathcal{L} - e\partial_\mu\alpha\,\bar{\psi}\gamma^\mu\psi = \mathcal{L} - \partial_\mu\alpha\, j^\mu(x) \tag{119}$$

其中 $j^\mu = e\bar{\psi}\gamma^\mu\psi$.

取两点关联函数 $\langle 0|T\psi(x_1)\bar{\psi}(x_2)|0\rangle$. 做变量变换并展开，得到

$$0 = \int \mathcal{D}\bar{\psi}\mathcal{D}\psi\mathcal{D}A\, e^{\mathrm{i}\int \mathrm{d}^4x\,\mathcal{L}} \left[-\mathrm{i}\int \mathrm{d}^4x\,\partial_\mu\alpha(x)\, j^\mu(x)\psi(x_1)\bar{\psi}(x_2) + \mathrm{i}e\alpha(x_1)\psi(x_1)\bar{\psi}(x_2) - \mathrm{i}e\alpha(x_2)\psi(x_1)\bar{\psi}(x_2)\right] \tag{120}$$

分部积分后提取 $\alpha(x)$ 系数，除以 Z，得

$$\mathrm{i}\partial_\mu\langle 0|Tj^\mu(x)\psi(x_1)\bar{\psi}(x_2)|0\rangle = -\mathrm{i}e\delta(x-x_1)\langle 0|T\psi(x_1)\bar{\psi}(x_2)|0\rangle + ie\delta(x-x_2)\langle 0|T\psi(x_1)\bar{\psi}(x_2)|0\rangle \tag{121}$$

对上述方程做 Fourier 变换. 定义

$$\int \mathrm{d}^4x\, e^{-\mathrm{i}k\cdot x}\int \mathrm{d}^4x_1\, e^{\mathrm{i}q\cdot x_1}\int \mathrm{d}^4x_2\, e^{-\mathrm{i}p\cdot x_2} \tag{122}$$

作用在方程两边，将关联函数转换为相应的散射振幅. 得到

$$-\mathrm{i}k_\mu\mathcal{M}^\mu(k;p;q) = -\mathrm{i}e\mathcal{M}_0(p;q-k) + \mathrm{i}e\mathcal{M}_0(p+k;q) \tag{123}$$

这是通常的 Ward-Takahashi 恒等式，它表明在 QED 中，顶点函数与电子传播子之间存在精确关系. 该恒等式是电荷守恒的体现，也是 QED 可重整化性的基础.

将上述推导推广到含有任意多个旋量场的关联函数，即可得到一般形式的 Ward-Takahashi 恒等式

$$K_\mu\mathcal{M}^\mu(k;p_1\cdots p_n;q_1\cdots q_n) = e\sum_i \left[\mathcal{M}_0(p_1\cdots p_n;q_1\cdots(q_i-k)\cdots) - \mathcal{M}_0(p_1\cdots(p_i+k)\cdots;q_1\cdots q_n)\right] \tag{124}$$

这些恒等式在微扰论中对应着费曼图之间的抵消关系，保证了 S 矩阵的规范不变性.