微扰论与小振动

呜哩天才琪露诺

华中科技大学物理学院

日期：2024 年 9 月 23 日

1 自由振动

1.1 单自由度

略.

1.2 简正模

多自由度系统的动能 $T=\frac{1}{2}M_{ij}(\mathbf{q})\dot{q}_i\dot{q}_j$，势能 $V=V(\mathbf{q})$. 设系统的平衡位置为 $\mathbf{0}$，在平衡位置附近，对 $M_{ij}(\mathbf{q})$ 和 $V(\mathbf{q})$ 进行泰勒展开，分别保留 M 和 V 至零阶项和二阶项，则

$$T=\frac{1}{2}M_{ij}(\mathbf{0})\dot{q}_i\dot{q}_j\equiv\frac{1}{2}m_{ij}\dot{q}_i\dot{q}_j$$

$$V=V(\mathbf{0})+\left(\frac{\partial V}{\partial q_i}\right)_{\mathbf{0}}q_i+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 V}{\partial q_i\partial q_j}\right)_{\mathbf{0}}q_iq_j\equiv\frac{1}{2}k_{ij}q_iq_j$$

$$L=\frac{1}{2}m_{ij}\dot{q}_i\dot{q}_j-\frac{1}{2}k_{ij}q_iq_j$$

由欧拉-拉格朗日方程，可导出运动方程

$$m_j\ddot{q}_j+k_{ij}q_j=0\,,i=1,2\cdots,n$$

或者，用矩阵形式更为紧凑地写成

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{x}}+\mathbf{K}\mathbf{x}=\mathbf{0}$$

取试探解 $q_j=a_je^{-\mathrm{i}\omega t}$，代入，方程组变为

$$(k_{ij}-\omega^2m_{ij})e^{-\mathrm{i}\omega t}a_j=0$$

或用矩阵形式紧凑地写成

$$[\mathbf{K}-\omega^2\mathbf{M}]\mathbf{a}=\mathbf{0}$$

亦即

$$\mathbf{M}^{-1}\mathbf{K}\mathbf{a}=\omega^2\mathbf{a}$$

也就是说，ω^2 是矩阵 $\mathbf{M}^{-1}\mathbf{K}$ 的本征值. 列出对应的本征方程

$$|\omega^2\mathbf{I}-\mathbf{M}^{-1}\mathbf{K}|=0$$

在这里称为久期方程. 解之，可得 n 个 ω^2，可以证明解出来的这些 ω^2 都是正数，所以 ω 必为实数，且一个 ω^2 对应符号相反的两个 ω. 对 ω_k^2，我们可以求出对应的本征矢 $\mathbf{a}_k$，则 $\mathbf{a}_ke^{-\mathrm{i}\omega_kt}$ 和 $\mathbf{a}_ke^{\mathrm{i}\omega_kt}$ 都是方程可能的解，

也即是系统可能的振动模式. 这种单一频率的振动模式称为系统的简正模式. 而这些特解又都是线性无关的(我们仅考虑 ω_k^2 互不相同的情形，即非简并情形)，则方程的通解为

$$\mathbf{q}(t)=\sum_{k=1}^{n}\mathbf{a}_k(C_k e^{-\mathrm{i}\omega_k t}+\overline{C_k}e^{\mathrm{i}\omega_k t})$$

之所以取 $e^{-\mathrm{i}\omega_k t}$ 和 $e^{\mathrm{i}\omega_k t}$ 的系数互为共轭，是为了使 $\mathbf{q}$ 为实矢量. 这样就有 n 个待定复系数 C_k，写成 $A_k+\mathrm{i}B_k$ 的形式，则有 $2n$ 个待定实系数，这可以从初值条件 $\mathbf{q}(0)$ 和 $\dot{\mathbf{q}}(0)$ 解出

$$\mathbf{q}(0)=2\sum_{k=1}^{n}\mathbf{a}_k A_k$$

$$\dot{\mathbf{q}}(0)=2\sum_{k=1}^{n}\mathbf{a}_k B_k\omega_k$$

一般而言，每个简正模式会涉及所有振动自由度，而每个自由度的振动又会是所有简正模式的叠加，这就给问题的求解带来很大困难。于是，我们希望找到一组特殊的广义坐标，使得每个振动自由度恰好对应一个本征频率。我们设

$$\mathbf{q}=\mathbf{P}\xi$$

则拉格朗日量变为

$$\begin{aligned}L &= \frac{1}{2}\dot{\mathbf{q}}^T\mathbf{M}\dot{\mathbf{q}}-\frac{1}{2}\mathbf{q}^T\mathbf{K}\mathbf{q}\\ &= \frac{1}{2}(\mathbf{P}\dot{\xi})^T\mathbf{M}(\mathbf{P}\dot{\xi})-\frac{1}{2}(\mathbf{P}\xi)^T\mathbf{K}(\mathbf{P}\xi)\\ &= \frac{1}{2}\dot{\xi}^T(\mathbf{P}^T\mathbf{M}\mathbf{P})\dot{\xi}-\frac{1}{2}\xi^T(\mathbf{P}^T\mathbf{K}\mathbf{P})\xi\\ &\equiv \frac{1}{2}\dot{\xi}^T\widetilde{\mathbf{M}}\dot{\xi}-\frac{1}{2}\xi^T\widetilde{\mathbf{K}}\xi\end{aligned}$$

用变分法，系统的运动方程为

$$\ddot{\xi}+\widetilde{\mathbf{M}}^{-1}\widetilde{\mathbf{K}}\xi=\mathbf{0}$$

根据线性代数的理论，存在 $\mathbf{P}$ 使得 $\widetilde{\mathbf{M}}$ 和 $\widetilde{\mathbf{K}}$ 同时为对角矩阵，从而 $\widetilde{\mathbf{M}}^{-1}\widetilde{\mathbf{K}}$ 是对角矩阵. 而

$$\widetilde{\mathbf{M}}^{-1}\widetilde{\mathbf{K}}=(\mathbf{P}^T\mathbf{M}\mathbf{P})^{-1}(\mathbf{P}^T\mathbf{K}\mathbf{P})=\mathbf{P}^{-1}(\mathbf{M}^{-1}\mathbf{K})\mathbf{P}$$

故 $\widetilde{\mathbf{M}}^{-1}\widetilde{\mathbf{K}}$ 有与 $\mathbf{M}^{-1}\mathbf{K}$ 相同的本征值. 而 $\widetilde{\mathbf{M}}^{-1}\widetilde{\mathbf{K}}$ 是对角阵，从而 $\widetilde{\mathbf{M}}^{-1}\widetilde{\mathbf{K}}$ 的对角元即为 $\mathbf{M}^{-1}\mathbf{K}$ 的本征值，则方程可解耦为

$$\ddot{\xi}_k+\omega_k^2\xi_k=0\,,k=1,2,\cdots,n$$

其解为

$$\xi_k=C_k e^{\mathrm{i}\omega_k t}+\overline{C_k}e^{-\mathrm{i}\omega_k}\,,k=1,2,\cdots,n$$

于是，我们使每个广义坐标都与一个本征频率对应，这组广义坐标称为简正坐标. 下面的问题就是如何找出这样的 $\mathbf{P}$，由 $\widetilde{\mathbf{M}}^{-1}\widetilde{\mathbf{K}}=\mathbf{P}^{-1}(\mathbf{M}^{-1}\mathbf{K})\mathbf{P}$ 可知 $\mathbf{P}$ 恰为使 $\mathbf{M}^{-1}\mathbf{K}$ 相似对角化的变换矩阵，按线性代数的理论，我们求出 $\mathbf{M}^{-1}\mathbf{K}$ 的本征向量 $\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_2,\cdots,\mathbf{a}_n$，因为 $\mathbf{M}^{-1}\mathbf{K}$ 是对称矩阵，所以 $\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_2,\cdots,\mathbf{a}_n$ 相互正交，将其归一化 $\widetilde{\mathbf{a}}_1=\dfrac{\mathbf{a}_1}{|\mathbf{a}_1|},\widetilde{\mathbf{a}}_2=\dfrac{\mathbf{a}_2}{|\mathbf{a}_2|},\cdots,\widetilde{\mathbf{a}}_n=\dfrac{\mathbf{a}_n}{|\mathbf{a}_n|}$，取矩阵

$$\mathbf{P}=\begin{pmatrix}\widetilde{\mathbf{a}_1} & \widetilde{\mathbf{a}_2} & \cdots & \widetilde{\mathbf{a}_n}\end{pmatrix}$$

这就是我们要求的矩阵.

2 阻尼振动

对于有耗散的系统，因为有机械能到内能的转换，无数的微观自由度无法被计及，因而在宏观上最小作用量原理失效。因此我们可以引入瑞利函数

$$\mathcal{F}=\frac{1}{2}\alpha_{ij}\dot{q}_i\dot{q}_j$$

其中系数 $F_{ij}>0$ 且 $\alpha_{ij}=\alpha_{ji}$，由

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t} &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial\dot{q}_i}\dot{q}_i-L\right)\\ &= \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial\dot{q}_i}-\frac{\partial L}{\partial q_i}\right)\dot{q}_i\\ &= -\frac{\partial\mathcal{F}}{\partial\dot{q}_i}\dot{q}_i\\ &= -2\mathcal{F}\end{aligned}$$

由之可以看出耗散函数的物理意义，即单位时间内系统所耗散的能量为 2 倍的耗散函数。引入瑞利函数后，系统的欧拉-拉格朗日方程可以改写为

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial\dot{q}_i}-\frac{\partial L}{\partial q_i}+\frac{\partial\mathcal{F}}{\partial\dot{q}_i}=0$$

再由 $L=\frac{1}{2}m_{ij}\dot{q}_i\dot{q}_j-\frac{1}{2}k_{ij}q_iq_j$ 和瑞利函数的表达式，可得

$$m_{ij}\ddot{q}_j+\alpha_{ij}\dot{q}_j+k_{ij}q_j=0$$

取试探解 $q_j=a_je^{-\mathrm{i}\omega t}$，代入可得

$$(-\omega^2m_{ij}-\mathrm{i}\omega\alpha_{ij}+k_{ij})a_j=0$$

或用矩阵形式紧凑地写成

$$(-\omega^2\mathbf{M}-\mathrm{i}\omega\alpha+\mathbf{K})\mathbf{a}=\mathbf{0}$$

这个方程的解法与上面的类似.

我们这里研究单自由度的系统，运动方程为

$$m\ddot{x}+\alpha\dot{x}+kx=0$$

令 $\frac{k}{m}=\omega_0^2,\frac{\alpha}{m}=2\lambda$，则

$$\ddot{x}+2\lambda x+\omega_0^2x=0$$

取试探解 $x=e^{-\mathrm{i}\omega t}$ 得

$$-\omega^2-2\mathrm{i}\lambda\omega+\omega_0^2=0$$

解之，$\omega=-\mathrm{i}\lambda\pm\sqrt{\omega_0^2-\lambda^2}$，则其通解为

$$x=Ae^{(-\lambda+\sqrt{\omega_0^2-\lambda^2}\mathrm{i})t}+Be^{(-\lambda-\sqrt{\omega_0^2-\lambda^2}\mathrm{i})t}$$

当 $\lambda>\omega_0$ 时，$\sqrt{\omega_0^2-\lambda^2}$ 为纯虚数，$\sqrt{\omega_0^2-\lambda^2}\mathrm{i}$ 为实数 $\sqrt{\lambda^2-\omega_0^2}$，则通解为

$$x=Ae^{(-\lambda+\sqrt{\lambda^2-\omega_0^2})t}+Be^{(-\lambda-\sqrt{\lambda^2-\omega_0^2})t}$$

其中 $-\lambda+\sqrt{\lambda^2-\omega_0^2}$ 和 $-\lambda-\sqrt{\lambda^2-\omega_0^2}$ 都为负数，于是 $|x|$ 单调递减，$t\to\infty$ 时 x 趋于 0，这种运动称为非周期阻尼.

当 $\lambda < \omega_0$ 时，$-\lambda \pm \sqrt{\omega_0^2 - \lambda^2}\mathrm{i}$ 为共轭复数，则通解为

$$\begin{aligned} x &= Ce^{(-\lambda+\sqrt{\omega_0^2-\lambda^2}\mathrm{i})t} + \overline{C}e^{(-\lambda-\sqrt{\omega_0^2-\lambda^2}\mathrm{i})t} \\ &= e^{-\lambda t}(Ce^{\sqrt{\omega_0^2-\lambda^2}\mathrm{i}t} + \overline{C}e^{-\sqrt{\omega_0^2-\lambda^2}\mathrm{i}t}) \\ &\equiv e^{-\lambda t}[(A+B\mathrm{i})(\cos\omega t + \mathrm{i}\sin\omega t) + (A-B\mathrm{i})(\cos\omega t - \mathrm{i}\sin\omega t)] \\ &= 2e^{-\lambda t}(A\cos\omega t - B\sin\omega t) \end{aligned}$$

这可以看作是振幅指数衰减的简谐振动.

3 受迫振动

若一个振子除了受到其平衡位置附近的谐振子势能外，还受到外力 $\mathbf{F}(t)$ 的作用，则称为受迫振子，其行为称为受迫振动. 其拉氏量为

$$L = \frac{1}{2}m_{ij}\dot{q}_i\dot{q}_j - \frac{1}{2}k_{ij}q_iq_j + q_iF_i(t)$$

考虑阻尼，可导出运动方程

$$m_{ij}\ddot{q}_j + \alpha_{ij}\dot{q}_j + k_{ij}q_j = F_j$$

我们仅考虑单自由度的情形，且只研究最有意义的周期性强迫力情况，即 $F = f\cos\gamma t$，则运动方程为

$$\ddot{x} + 2\lambda\dot{x} + \omega_0^2 x = \frac{f}{m}e^{\mathrm{i}\gamma t}$$

其中 γ 和 ω_0 的意义和前面一致. 此方程为非齐次方程，对应的齐次方程我们已经解出。取此方程的试探特解为 $x = Be^{\mathrm{i}\gamma t}$，则

$$B = \frac{f}{m(\omega_0^2 - \gamma^2 + 2\mathrm{i}\lambda\gamma)}$$

有

$$|B| = \frac{f}{m\sqrt{(\omega_0^2-\gamma^2)^2 + 4\lambda^2\gamma^2}}$$

$$\arg B = \arctan\frac{2\lambda\gamma}{\gamma^2 - \omega_0^2}$$

则通解应为

$$x = ae^{-\lambda t}\cos(\omega t + \alpha) + b\cos(\gamma t + \delta)$$

第一项随时间指数衰减，时间足够长后只剩下第二项. 振幅依赖于外力的频率，在 $\gamma = \sqrt{\omega_0^2 - 2\lambda^2}$ 时振动振幅最大，称为共振.

4 参变共振

考虑一个固有频率依赖于时间的一维振子，它的运动方程为

$$\ddot{x} + \omega^2(t)x = 0$$

其中 $\omega^2(t)$ 满足周期性条件

$$\omega^2(t+T) = \omega^2(t)$$

这样的振子称为参变振子. 方程有两个线性独立的解 $x_1(t)$ 和 $x_2(t)$，从 $\ddot{x}(t+T)+\omega^2(t+T)x(t+T)=0$ 和 ω^2 的周期性可以推出 $\ddot{x}(t+T)+\omega^2(t)x(t+T)=0$，所以 $x_1(t+T)$ 和 $x_2(t+T)$ 也是方程的解，由线性方程组解的理论可以知道，它们可以写成原先的两个解的线性组合

$$x_i(t+T)=R_{ij}x_j(t)$$

矩阵 $\mathbf{R}$ 可以看作平移 T 这一线性变换在基矢量 $\{x_1(t),x_2(t)\}$ 上的矩阵. 只要给定 $x(T)$ 和 $\dot{x}(T)$，就确定了 $x(t+T)$. 从 $x_i(T)=R_{ij}x_j(0)$ 及 $\dot{x}_i(T)=R_{ij}\dot{x}_j(0)$ 可以知道，对确定的 $x(t+T)$，只要确定 $x_1(t)$ 及 $x_2(t)$ 的初值条件，就能确定矩阵 $\mathbf{R}$ 的形式. 一般选取标准基

$$x_1(0)=1\quad \dot{x}_1(0)=0$$
$$x_2(0)=0\quad \dot{x}_2(0)=1$$

对应的矩阵 $\mathbf{R}$ 为

$$\mathbf{R}=\begin{pmatrix}x_1(T) & \dot{x}_1(T)\\ x_2(T) & \dot{x}_2(T)\end{pmatrix}$$

把 $x_1(t)$ 和 $x_2(t)$ 联合起来写成矢量 $\mathbf{x}(t)=\begin{pmatrix}x_1(t) & x_2(t)\end{pmatrix}^T$，则

$$\mathbf{x}(t+T)=\mathbf{R}\mathbf{x}(t)$$

. 于是，我们只要知道解在一个周期内的行为，此后的行为都可以通过将 $\mathbf{R}$ 不停地作用于 $\mathbf{x}(t)$ 上得到

$$\mathbf{x}(t+nT)=\mathbf{R}^n\mathbf{x}(t)$$

$\mathbf{x}(t)$ 的长期行为依赖于 $\mathbf{R}$ 的本征值 μ，这个本征值对应的本征方程为

$$\mu^2-(x_1(T)+\dot{x}_2(T))\mu+\det(\mathbf{R})=0$$

其中 $\mathbf{R}$ 为常微分方程的朗斯基行列式，其值恒为 1. 于是解出两个本征值

$$\mu_{1,2}=\frac{x_1(T)+\dot{x}_2(T)\pm\sqrt{[x_1(T)+\dot{x}_2(T)]^2-4}}{2}$$

共有两种情况：

1. $|x_1(T)+\dot{x}_2(T)|<2$，则本征值方程有两个互为复共轭的根，令其为 $\mu_{1,2}\equiv\mu_\pm=\exp\pm\mathrm{i}\lambda T$，其中 λ 取为正实数，称为弗洛凯特征频率. 将对应的本征矢量记作 $e_\pm(t)$，于是

   $$e_\pm(t+T)=e^{\pm\mathrm{i}\lambda T}e_\pm(t)$$

   将解写为 $e^{\pm\mathrm{i}\lambda T}u_\pm(t)$ 的形式，可以发现

   $$u_\pm(t+T)=u_\pm(t)$$

   也就是说，这种情况下，本征解可以写为一个周期为 T 的函数乘以一个随时间周期振荡的相因子.
2. $|x_1(T)+\dot{x}_2(T)|>2$，则本征值方程有两个互为倒数的实根. 方程的两个本征解写为

   $$e_1(t+T)=\mu^{\frac{t}{T}}u_1(t)$$
   $$e_2(t+T)=\mu^{-\frac{t}{T}}u_2(t)$$

   其中 $|\mu|>1$，$u_{1,2}(t)$ 仍是周期为 T 的函数. 第二个解是指数衰减的，第一个解是指数增加的，这说明平衡位置是不稳定的. 如果振子的特征频率是时间的周期函数，则振子的振幅很可能会指数增加.
3. $|x_1(T)+\dot{x}_2(T)|=2$，则本征值方程有两个简并的实根，要么是 1，要么是 -1. 对 $\mathbf{R}$，要么是

   $$\mathbf{R}=(\pm1)\mathbf{I}$$

此时体系的解基本上是有界的；要么

$$\mathbf{R} = \begin{pmatrix} \mu & \rho \\ 0 & \mu \end{pmatrix}$$

其中 $\mu = \pm 1$ 且 $\rho \neq 0$，计算可知

$$\mathbf{R}^n = \begin{pmatrix} \mu^n & n\mu^{n-1}\rho \\ 0 & \mu^n \end{pmatrix}$$

其对角元是周期振荡的，而非对角元按 $O(n)$ 增加，趋于发散.

5 非谐效应

日后再补充.