狭义相对论

呜哩天才琪露诺

华中科技大学物理学院

日期：2024 年 5 月 17 日

1 经典力学的时空观

在经典力学中，空间是相对的，两个不同时事件发生在同一还是不同空间点上，依赖于参照系的选择. 但是，经典力学认为时间是绝对的，若在某个参考系中，两个事件同时发生，则在一切参考系中，两个事件都是同时发生的. 绝对时间假设是经典力学的一个基础假设.

经典力学的另一个基础假设是伽利略相对性原理，即力学规律在一切惯性参考系中都是相同的.

经典力学认为相互作用的传播速度是无穷的，这可以从两点加以说明. 其一，如果相互作用是以一个有限速度传递的，而时间的绝对性意味着通常的速度相加法则应该适用于一切现象，因此在有相对运动的不同参考系中传播速度不同，从而导致相互作用的物体的运动规律在不同惯性系中不同，与伽利略相对性原理相悖. 其二，经典力学中相互作用的势能仅依赖于所有质点在同一时刻的位置，这意味着其中任何质点的位置改变立刻影响到其它所有质点，即相互作用是瞬时传递的.

2 狭义相对论的基本假设

狭义相对论也有两条基本假设. 其一是狭义相对性原理，即所有的自然定律在一切惯性系中都是相同的.

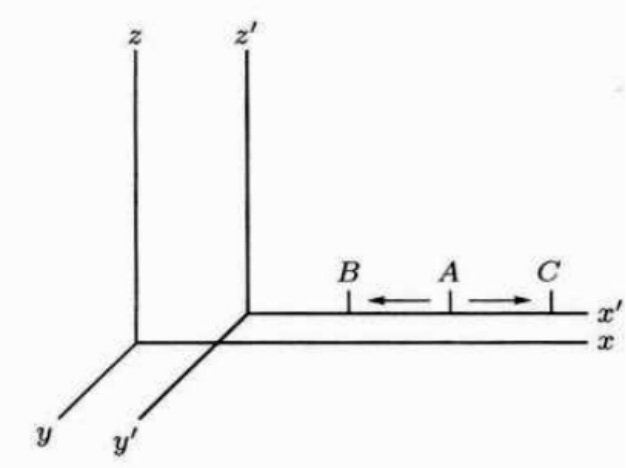
其二是光速不变原理. 这里的“光速”不能简单地理解为“真空中的光速”，而应理解为相互作用传播速度的上限. 经典力学认为这个上限是无穷，而狭义相对论指出这一上限是一有限常数 c，且 c 在一切惯性系中的值都是相同的. 电动力学可以证明，这个 c 应恰好是真空中电磁波传播的速度.

3 同时的相对性

从 x' 轴上的 A 发一个信号，对 K 系中的人，$\mathrm{AB}=\mathrm{AC}$，信号同时到达 B,C 两点. 但是对于 K' 系中的人，信号向左走过的距离短，向右走过的距离长，而信号向左向右传递的速度都是 c，故信号先到达 B，后到达 C.

这说明了，在狭义相对论中，同时性是相对的. 在一个惯性系中的观察者看来同时发生的事，在另一个参考系的观察者看来并不一定同时发生.

在经典力学中，是没有这种问题的. 因为信号传递的速度是无穷大，无论哪个参考系中的观察者看来，信号都是瞬时到达 B,C 的.



4 狭义相对论的时空结构

一个事件由发生的空间点和时间决定. 我们建立假想的四维空间，包含三条空间坐标轴和一条时间坐标轴. 空间中的一个点代表一个事件，称为世界点. 粒子的演化对应一条曲线，称为世界线.

设事件 1：K 系内 t_1 时刻从空间点 (x_1, y_1, z_1) 发出一个信号. 事件 2：在 t_2 时刻该信号到达空间点 (x_2, y_2, z_2)，显然成立：

$$(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2 - c^2(t_2 - t_1)^2 = 0$$

在 K' 系中，两事件的则为 (x_1', y_1', z_1', t_1') 和 (x_2', y_2', z_2', t_2')，且有：

$$(x_2' - x_1')^2 + (y_2' - y_1')^2 + (z_2' - z_1')^2 - c^2(t_2' - t_1')^2 = 0$$

我们称：

$$s_{12} = [c^2(t_2 - t_1)^2 - (x_2 - x_1)^2 - (y_2 - y_1)^2 - (z_2 - z_1)^2]^{\frac{1}{2}}$$

为两事件的间隔. 于是，若事件在某个惯性参考系内间隔为 0，则在一切惯性参考系内它们的间隔都为 0. 使两事件无限接近，则上面的式子可改写为：

$$\mathrm{d}x^2 + \mathrm{d}y^2 + \mathrm{d}z^2 - c^2\mathrm{d}t^2 = \mathrm{d}s^2$$

易见 $\mathrm{d}s$ 和 $\mathrm{d}s'$ 应为同阶无穷小量，则：

$$\mathrm{d}s^2 = a\mathrm{d}s'^2$$

其中 a 为一待定量. 由时空的均匀性及空间的各向同性，a 仅与两惯性系间相对速度的绝对值有关.

考虑 K_1, K_2, K，$\mathbf{v_1}$ 和 $\mathbf{v_2}$ 为 K_1, K_2 相对于 K 的速度，则：

$$\mathrm{d}s^2 = a(\mathbf{v_1})\mathrm{d}s_1^2\mathrm{d}s^2 = a(\mathbf{v_2})\mathrm{d}s_2^2\mathrm{d}s_1^2 = a(\mathbf{v_{12}})\mathrm{d}s_2^2$$

推出：

$$\frac{a(\mathbf{v_1})}{a(\mathbf{v_2})} = a(\mathbf{v_{12}})$$

等号左边仅依赖于 $\mathbf{v_1}, \mathbf{v_2}$ 之绝对值，而等式右边还依赖于 $\mathbf{v_1}, \mathbf{v_2}$ 间的夹角，故 a 只能为常量 1，即：

$$\mathrm{d}s^2 = \mathrm{d}s'^2$$

继而：

$$s = s'$$

即：两事件之间隔在所有惯性参考系中相同.

5 类时间隔、类空间隔、光锥

设 K 系中有两事件 (x_1, y_1, z_1, t_1) 和 (x_2, y_2, z_2, t_2). 能否找到这样一个参考系 K'，使得其中两事件在同一空间点发生?

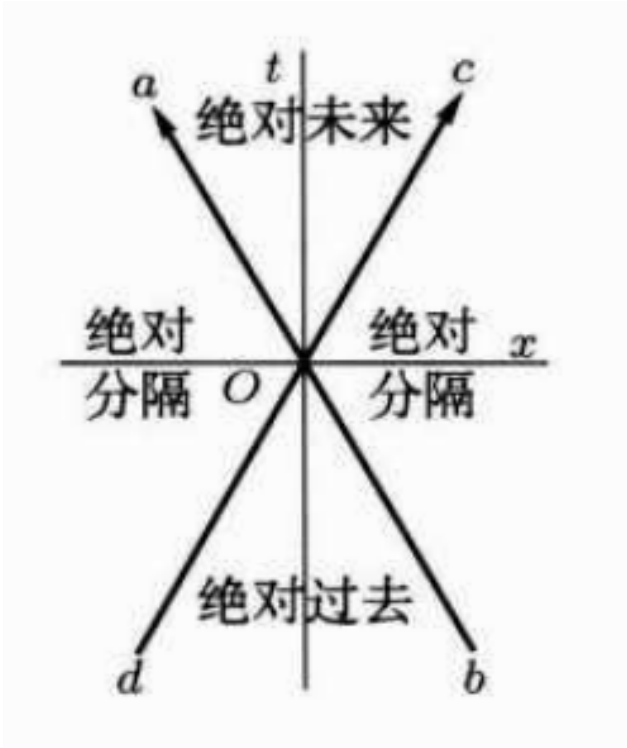
记 $t_2 - t_1 = t_{12}$，$(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2 = l_{12}^2$，则 K 系中 $s_{12}^2 = c^2 t_{12}^2 - l_{12}^2$，$K'$ 系中 $s_{12}'^2 = c^2 t_{12}'^2 - l_{12}'^2$.

由 $s_{12}^2 = s_{12}'^2$ 及 $l_{12}'^2 = 0$ 得 $s_{12}^2 = c^2 t_{12}'^2 > 0$.

于是，存在一个参考系使事件 $1, 2$ 发生于同一空间点，等价于其间隔 s_{12} 为实数，称实数间隔为类时间隔.

同理，可以推出，存在一个参考系使事件 $1, 2$ 发生于同一时间，等价于其间隔 s_{12} 为虚数，称实数间隔为类空间隔.

间隔的类时性与类空性只取决于两事件本身，与参考系是无关的.



取原点为事件 O 的世界点，两条直线代表两个信号经过事件 O（即在 $t = 0$ 时刻经过 $x = 0$）以光速向两个方向的传递. 在 aOc 及 dOb 区域内，$c^2t^2 - x^2 > 0$，区域内部的任何事件与 O 的间隔都是类时的. 即，不存在一个参考系使得两事件发生于同一时刻，事件的先后顺序是一定的. aOC 内的事件一定后于 O 发生，该区域称为 O 的绝对未来. aOC 内的事件一定先于 O 发生，该区域称为 O 的绝对过去. bOd 和 cOb 的区域内，事件发生的先后顺序与具体参考系有关，因果律不再有意义. 这些区域称为 O 的绝对间隔.

若考虑所有三个空间坐标轴，则代替两条相交直线的是圆锥体 $x^2 + y^2 + z^2 - c^2t^2 = 0$，称为光锥.

6 固有时，钟慢效应

设一静止系 K，一只钟相对于 K 系作任意的运动，但在任一无限小时间间隔内，钟都是匀速的，可以引入固联在钟上的坐标系，与钟本身指示的时间一起构成一个惯性参考系.

对 K 系中的无限小时间间隔内，动钟行进 $\sqrt{\mathrm{d}x^2+\mathrm{d}y^2+\mathrm{d}z^2}$. 与钟固连的参考系中，钟静止，钟指示的时间间隔为 $\mathrm{d}t'$，则 $\mathrm{d}s^2=c^2\mathrm{d}t^2-\mathrm{d}x^2-\mathrm{d}y^2-\mathrm{d}z^2=c^2\mathrm{d}t'^2$，有：

$$\mathrm{d}t'=\mathrm{d}t\sqrt{1-\frac{\mathrm{d}x^2+\mathrm{d}y^2+\mathrm{d}z^2}{c^2\mathrm{d}t^2}}=\mathrm{d}t\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}$$

其中 v 为钟相对于 K 系的速度. 当静钟走时为 t_2-t_1 时，动钟走时为：

$$t_2'-t_1'=\int_{t_1}^{t_2}\mathrm{d}t\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}$$

固联在物体上随其一起运动的钟所指示的时间称为物体的固有时. 可见，运动物体的固有时，相较于静止系内相应的时间间隔短，这称为“钟慢效应”.

我们知道，运动是相对的. K 系内的观察者看来 K' 系是运动的，K' 系内的钟会走得较慢. 而在 K' 系内的观察者看来，应该是 K 系内的钟变慢了. 这是否矛盾?

不矛盾. 假设在某一时刻，K' 系内的一只钟 B 与 K' 内的一只钟 A 空间位置相同，且指示时间恰好相同. 一段时间后，K' 系中的这一只钟与 K 系中的另一只钟 C 空间位置重合，再比较这两只钟的指示时间. K 系中的观察者会认为自己所在的参考系中所有的钟走的都是一样快的，B 指示的时间比 C 滞后，说明是 B 走得慢. 但同时是相对的，“K 系中所有的钟走的都是一样快的”对 K' 系中的观察者并不成立. 或者说，要比较两个参考系中钟的快慢，总要将一个参考系中的某只钟与另一个参考系中的多个钟相比较，这本来就不是一个对称的过程.

有两只钟，一只静止，另一只描绘一闭合路径回到出发点，显然动钟与静钟相比走得慢. 那么，是否可以把动钟看成静止的，继而得到相反的结论呢? 不能. 动钟有加速和减速的过程，固联在动钟上的参考系是非惯性系，相对性原理不再成立.

7 洛伦兹变换、尺缩效应

现在要求一个惯性系到另一个惯性系的变换的数学形式. 这种变换必须使四维时空内的度量结构不变，满足这一要求的变换仅有平移和旋转. 平移变换是平凡的，我们只考虑旋转变换.

四维空间内的一切转动都可以分解为在 xy,yz,xz,tx,ty,tz 内的旋转. 前三个对应一般的空间转动. 我们研究涉及 t 轴的转动. 固定 y,z，研究在 tx 平面内的转动，变换须使 $c^2t^2-x^2$ 保持不变，可知其数学表达式应为：

$$\begin{pmatrix}x\\ct\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\cosh\phi & \sinh\phi\\ \sinh\phi & \cosh\phi\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x'\\ct'\end{pmatrix}$$

若 K' 以速度 V 沿 x 轴相对 K 作相对运动，则此时只有 x,t 变化，变换具有上述形式，只需定下 ϕ. ϕ

只与 V 有关，计算得 $\sinh\phi=\dfrac{\frac{v}{c}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}},\cosh\phi=\dfrac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$，则洛伦兹变换的数学形式为：

$$\begin{pmatrix}x\\y\\z\\ct\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} & & & \frac{\frac{v}{c}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ \frac{\frac{v}{c}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} & & & \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x'\\y'\\z'\\ct'\end{pmatrix}$$

K 系内一根平行于 x 轴的静杆，在 K 系内测得其长度为 $x_2-x_1=\Delta x$. K' 系内，同一时刻 t' 杆两端在 K' 系内的坐标为 x_2',x_1'，则 $x_{1,2}=\dfrac{x_{1,2}'+Vt'}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$，则：

$$\Delta x=\frac{\Delta x'}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$$

杆的固有长度长度指在相对它静止的参考系内它的长度. 可见，运动物体的固有长度，相较于静止系内测得的长度要长，这就是尺缩效应.

洛伦兹变换具有不可对易性：洛伦兹变换的几何意义是四维空间内的转动，很明显，两次绕不同轴转动的结果，与施行它们的先后顺序有关.

8 速度的变换

对洛伦兹变换微分可得速度变换公式. 设 K' 系相对 K 以速度 v 沿 x 轴运动，质点速度在 K 系中为 $\mathbf{u}=(u_x,u_y,u_z)$，在 K' 系中为 $\mathbf{u}'=(u_x',u_y',u_z')$，则：

$$u_x'=\frac{u_x-v}{1-\frac{vu_x}{c^2}},\quad u_y'=\frac{u_y}{\gamma\left(1-\frac{vu_x}{c^2}\right)},\quad u_z'=\frac{u_z}{\gamma\left(1-\frac{vu_x}{c^2}\right)}$$

逆变换只需将 v 换为 $-v$. 当 $u_x=c$ 时，可得 $u_x'=c$，体现光速不变.

9 四维矢量

四维时空坐标记作 $x^\mu=(ct,\mathbf{r})$，度规张量 $\eta_{\mu\nu}=\mathrm{diag}(1,-1,-1,-1)$. 间隔平方为 $\mathrm{d}s^2=\eta_{\mu\nu}\mathrm{d}x^\mu\mathrm{d}x^\nu$. 洛伦兹变换保持 $\mathrm{d}s^2$ 不变. 一般地，若一组四个量 A^μ 在洛伦兹变换下与 $\mathrm{d}x^\mu$ 变换相同，则称 A^μ 为四维矢量. 其标量积 $A^\mu B_\mu=A^0B^0-\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}$ 是洛伦兹不变量.

10 四维速度

粒子的固有时 τ 满足 $\mathrm{d}\tau=\mathrm{d}s/c$. 四维速度定义为：

$$u^\mu=\frac{\mathrm{d}x^\mu}{\mathrm{d}\tau}=(\gamma c,\,\gamma\mathbf{v}),\quad \gamma=\frac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}}$$

它满足归一化条件 $u^\mu u_\mu=c^2$. 四维速度的变换直接由洛伦兹变换给出.

11 四维动量与能量

四维动量 $p^\mu = mu^\mu = (E/c, \mathbf{p})$，其中 $E = \gamma mc^2$ 为能量，$\mathbf{p} = \gamma m\mathbf{v}$ 为三维动量. 不变量为：

$$p^\mu p_\mu = \frac{E^2}{c^2} - \mathbf{p}^2 = m^2c^2$$

即能量-动量关系 $E^2 = p^2c^2 + m^2c^4$. 对于光子，$m = 0$，有 $E = pc$.

12 最小作用量原理

为了研究实物粒子的运动，我们从最小作用量原理出发. 该原理指出：对于每一个力学体系，存在一个称为**作用量**的积分 S，实际运动使 S 取最小值，即变分 $\delta S = 0$.

对于自由粒子（不受任何外力），作用量必须与参考系的选择无关，即必须是洛伦兹标量. 另外，被积函数应为世界线的一阶微分. 对于一个自由粒子，唯一能构造出的这种标量就是间隔 ds（或其常数倍）. 因此作用量必须取如下形式：

$$S = -\alpha \int_a^b ds,$$

其中 $\alpha > 0$. 这是因为沿着直线世界线的 $\displaystyle\int_a^b ds$ 取最大值，为了使得作用量在实际路径上有最小值，需要添上负号（这样直线世界线给出的作用量最小）. α 是表征粒子的常数.

利用间隔与坐标时的关系 $ds = c\sqrt{1 - v^2/c^2}\, dt$，可将作用量写为对时间的积分：

$$S = \int_{t_1}^{t_2} L\, dt,$$

从而得到拉格朗日函数

$$L = -\alpha c\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}.$$

为确定 α，考虑经典极限 $c \to \infty$. 将 L 按 v/c 展开：

$$L = -\alpha c\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \approx -\alpha c + \frac{\alpha v^2}{2c}.$$

拉格朗日函数中的常数项不影响运动方程，可以略去. 略去 $-\alpha c$ 后与经典力学的拉格朗日函数 $L = \dfrac{1}{2}mv^2$ 比较，得

$$\frac{\alpha}{2c} = \frac{m}{2} \quad \Longrightarrow \quad \alpha = mc.$$

因此，自由粒子的作用量和拉格朗日函数分别为

$$\boxed{S = -mc\int_a^b ds}, \qquad \boxed{L = -mc^2\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}.$$

13 能量与动量

粒子的动量定义为 $\mathbf{p} = \partial L/\partial \mathbf{v}$. 对拉格朗日函数求导得

$$\mathbf{p} = \frac{m\mathbf{v}}{\sqrt{1 - \dfrac{v^2}{c^2}}}.$$

在低速极限 $v \ll c$ 下，$\mathbf{p} \approx m\mathbf{v}$，回到经典表达式. 当 $v \to c$ 时，动量趋于无穷大，表明有质量粒子无法达到光速.

三维力 $\mathbf{f} = d\mathbf{p}/dt$. 在不同情况下，力与加速度的比例不同：

- 若力垂直于速度（只改变方向），则
$$\frac{dp}{dt} = \frac{m}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \frac{dv}{dt}.$$
- 若力平行于速度（只改变大小），则
$$\frac{dp}{dt} = \frac{m}{(1 - v^2/c^2)^{3/2}} \frac{dv}{dt}.$$

可见，在相对论力学中，力与加速度之比依赖于力的方向.

粒子的能量定义为 $\mathcal{E} = \mathbf{p} \cdot \mathbf{v} - L$. 代入 L 和 $\mathbf{p}$ 的表达式：
$$\mathcal{E} = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - \dfrac{v^2}{c^2}}}.$$
当 $v = 0$ 时，能量取有限值 $\mathcal{E} = mc^2$，称为**静能**. 在低速下展开：
$$\mathcal{E} \approx mc^2 + \frac{1}{2}mv^2,$$
其中第二项即为经典动能.

上述公式同样适用于由多个粒子组成的复合物体（此时 m 为总质量，v 为整体运动速度）. 对于静止的复合物体，其静能 mc^2 不仅包含各组成部分的静能之和，还包含内部粒子的动能和相互作用能. 因此，复合物体的总质量 m 并不等于其各部分质量之和，即相对论力学中质量守恒不再成立，只有包含静能在内的总能量守恒成立.

将 $\mathcal{E}$ 和 $\mathbf{p}$ 的表达式平方后相减，消去速度，得到重要关系：
$$\frac{\mathcal{E}^2}{c^2} = p^2 + m^2c^2,$$
或等价地
$$\mathcal{E} = c\sqrt{p^2 + m^2c^2}.$$
此即相对论性能量-动量关系. 在低速 $p \ll mc$ 时，展开得
$$\mathcal{E} \approx mc^2 + \frac{p^2}{2m}.$$
由 $\mathbf{p} = \mathcal{E}\mathbf{v}/c^2$，即
$$\mathbf{v} = \frac{\mathbf{p}c^2}{\mathcal{E}}.$$
对于质量为零的粒子（如光子、中微子），由能量-动量关系可得 $p = \mathcal{E}/c$，且它们必须以光速运动. 对于有质量粒子，在极端相对论情况（$\mathcal{E} \gg mc^2$）下，也有 $p \approx \mathcal{E}/c$.

作用量 $S = -mc\displaystyle\int ds$ 的变分为
$$\delta S = -mc \int_a^b \frac{dx_i\, \delta x^i}{ds} = -mc \int_a^b u_i\, \delta x^i\, ds.$$
分部积分得
$$\delta S = -mc\, u_i \delta x^i \Big|_a^b + mc \int_a^b \delta x^i \frac{du_i}{ds} ds.$$
对于固定端点（$\delta x^i|_a = \delta x^i|_b = 0$），实际路径满足 $\delta S = 0$，故
$$\frac{du_i}{ds} = 0,$$
即自由粒子的四维速度恒定.

四维动量定义为
$$p_i = -\frac{\partial S}{\partial x^i},$$

其分量为

$$p_i = \left(\frac{\mathcal{E}}{c}, -\mathbf{p}\right), \qquad p^i = \left(\frac{\mathcal{E}}{c}, \mathbf{p}\right).$$

由变分结果 $\delta S = -mcu_i\delta x^i$ 可知，对于自由粒子有

$$p^i = mc\,u^i,$$

代入四维速度的分量 $u^i = (\gamma c, \gamma\mathbf{v})$，立即得到 $\mathcal{E} = \gamma mc^2$ 和 $\mathbf{p} = \gamma m\mathbf{v}$.

四维动量的平方是洛伦兹不变量：

$$p_i p^i = m^2c^2,$$

这正是能量-动量关系.

设参考系 K' 相对 K 以速度 V 沿 x 轴运动，则由四维动量的变换（类似于坐标变换）得

$$p_x = \frac{p'_x + \dfrac{V}{c^2}\mathcal{E}'}{\sqrt{1 - V^2/c^2}}, \quad p_y = p'_y, \quad p_z = p'_z, \quad \mathcal{E} = \frac{\mathcal{E}' + Vp'_x}{\sqrt{1 - V^2/c^2}}.$$

四维力定义为 $g^i = dp^i/ds = mc\,du^i/ds$，它满足 $g_i u^i = 0$. 用三维力 $\mathbf{f} = d\mathbf{p}/dt$ 可表示为

$$g^i = \left(\frac{\mathbf{f}\cdot\mathbf{v}}{c^2\sqrt{1 - v^2/c^2}}, \frac{\mathbf{f}}{c\sqrt{1 - v^2/c^2}}\right),$$

其中时间分量与力的功率有关.

将 $p_i = -\partial S/\partial x^i$ 代入 $p_i p^i = m^2c^2$，得到相对论性哈密顿-雅可比方程：

$$\frac{1}{c^2}\left(\frac{\partial S}{\partial t}\right)^2 - \left(\frac{\partial S}{\partial x}\right)^2 - \left(\frac{\partial S}{\partial y}\right)^2 - \left(\frac{\partial S}{\partial z}\right)^2 = m^2c^2.$$

为过渡到经典力学，令 $S = S' - mc^2t$（因为相对论能量包含静能 mc^2）. 代入上述方程并整理得

$$\frac{1}{2mc^2}\left(\frac{\partial S'}{\partial t}\right)^2 - \frac{\partial S'}{\partial t} - \frac{1}{2m}\left[\left(\frac{\partial S'}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial S'}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial S'}{\partial z}\right)^2\right] = 0.$$

在 $c \to \infty$ 极限下，第一项消失，得到经典哈密顿-雅可比方程：

$$\frac{\partial S'}{\partial t} + \frac{1}{2m}(\nabla S')^2 = 0.$$