线性算子与线性泛函

呜哩天才琪露诺

华中科技大学物理学院

日期：2026 年 6 月 7 日

目录

1 线性算子 1

2 Riesz 表示定理 4

3 Baire 纲定理 4

4 一致有界原理 6

5 开映射定理 8

6 闭图像定理 10

1 线性算子

定义 1.1. 设 X, Y 为向量空间，若 $T : X \to Y$ 使得 $T(\alpha x + \beta y) = \alpha Tx + \beta Ty$ 对一切 $x, y \in X$ 和 $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$ 都成立，则称 T 为线性算子. 特别地，若 $Y = \mathbb{K}$，则称 T 为线性泛函.

例 1.1. 以下是线性算子的一些例子

- 设 Ω 为 $\mathbb{R}^n$ 中的开集，$X = Y = C^\infty(\Omega)$，则 $T = \sum_{|\alpha|=k} a_\alpha \partial^\alpha$ 是 $X \to Y$ 的线性算子；
- 设 $X = L^p(\Omega)$，Y 是 Ω 上可测函数的集合，$K(x, y)$ 为 $\Omega \times \Omega$ 上的可测函数，则 $T : X \to Y, u \mapsto Tu$ 满足 $(Tu)(x) = \int_\Omega K(x, y)u(y)\mathrm{d}y, \quad x \in \Omega$ 为线性算子；
- 特别地，取积分核 $K(x, y) = e^{-2\pi \mathrm{i} xy}$，则 $(\mathcal{F}f)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(y)e^{-2\pi \mathrm{i} xy}\mathrm{d}y$ 就是 Fourier 变换.

以下是非线性算子的一些例子

- $f(u) = \int_\Omega u(x)^2 \mathrm{d}x$ 是非线性泛函；
- $\|u\|_p$ 是非线性泛函.

定义 1.2. 称线性算子 $T : X \to Y$ 为有界的，若存在 $C > 0$ 使得 $\|Tx\|_Y \le C \|x\|_X$ 对一切 $x \in X$ 成立.

可见，T 有界等价于 T 把 X 中的有界集映为 Y 中的有界集合.

定理 1.1. 线性算子 T 是有界的等价于 T 是连续的.

证明. 1. ($\Rightarrow$) 取 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subseteq X$，$\|x_n - x\|_X \to 0$ 时，$\|Tx_n - Tx\|_Y = \|T(x_n - x)\|_Y \leq C\|x_n - x\|_X \to 0$，故 T 连续.

2. ($\Leftarrow$) 设 T 无界，则任意的 n，都存在 x_n 使得 $\|Tx_n\|_Y > n\|x_n\|_X$，令 $\tilde{x}_n = \dfrac{x_n}{n\|x_n\|_X}$，则 $\|T\tilde{x}_n\|_Y = \dfrac{\|Tx_n\|_Y}{n\|x_n\|_X} > 1$，但 $\|\tilde{x}_n\|_X = \dfrac{1}{n} \to 0$，$T$ 在 $x = 0$ 处不连续，矛盾!

□

定理 1.2. 有限维赋范空间之间的线性算子一定有界.

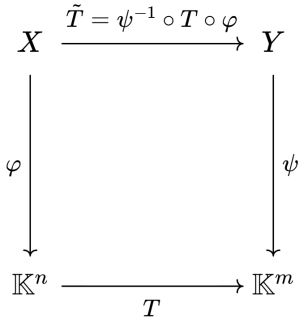


图 1: 有限维线性空间之间的线性算子

证明. 设 X 是 n 维线性空间，Y 是 m 维线性空间，则 $\varphi : X \to \mathbb{K}^n$ 和 $\psi : Y \to \mathbb{K}^m$ 是连续的代数同构，只要证明存在连续线性映射 $T : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m$，则 $\tilde{T} = \psi^{-1} \circ T \circ \varphi : X \to Y$ 自然是连续（有界）线性算子，如交换图(1)所示.

对 $x \in \mathbb{K}^n$，$Tx = Ax$，其中 $A = (a_{ij})_{1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n}$. 则

$$\|Tx\|_{\mathbb{K}^m} = \left[\sum_{i=1}^{m}\left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j\right)^2\right]^{\frac{1}{2}} \leq \left[\sum_{i=1}^{m}\left(\sum_{j=1}^{n}|a_{ij}|^2\right)\left(\sum_{j=1}^{n}|x_j|^2\right)\right]^{\frac{1}{2}} = \left(\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}|a_{ij}|^2\right)^{\frac{1}{2}}\|x\|_{\mathbb{K}^n}$$

其中 $\left(\sum\limits_{i=1}^{m}\sum\limits_{j=1}^{n}|a_{ij}|^2\right)^{\frac{1}{2}}$ 是由 A 决定的常数，T 有界. □

下面我们给一个无界算子的例子.

例 1.2. 设 $X = C^1([0,1]), Y = C([0,1])$，都赋以一致范数，$T = \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}$. 考虑 $u_n(t) = t^n, \quad n = 1, 2, \cdots$. 则 $\|Tu_n\| = \left\|nt^{n-1}\right\| = n$，$\|u_n\| = 1$ 但 $\dfrac{\|Tu_n\|}{\|u_n\|} = n$ 可以任意大. T 无界.

实际上，(1.2)的条件可以放宽，只要对定义域做出限制即可.

定理 1.3. 若 $\dim X < \infty$，则 X 到 Y 的线性算子有界. 若 $\dim X = \infty$，且 $Y \neq \{0\}$，则一定存在 $X \to Y$ 的无界线性算子.

证明. 1. 设 $\dim X = n$，取一组基 $\{e_1, \ldots, e_n\}$，则任意 $x \in X$ 可唯一表示为 $x = \sum\limits_{i=1}^{n} a_i e_i$，其中 a_i 是标量. 定义 $\|\cdot\|_\infty$ 为坐标的极大范数 $\|x\|_\infty = \max\limits_{1 \leq i \leq n}|a_i|$. 由于有限维空间上所有范数等价，存在常数 $c > 0$ 使得

$$\|x\|_\infty \leq c\|x\|_X \quad \forall x \in X.$$

由线性性，$Tx=\sum_{i=1}^{n}a_iT(e_i)$. 利用 Y 中范数的三角不等式和齐次性

$$\|Tx\|_Y \le \sum_{i=1}^{n}|a_i|\|T(e_i)\|_Y \le \left(\max_{1\le i\le n}|a_i|\right)\sum_{i=1}^{n}\|T(e_i)\|_Y = \|x\|_\infty \cdot M$$

其中 $M=\sum_{i=1}^{n}\|T(e_i)\|_Y$ 是常数. 代入 $\|x\|_\infty \le c\|x\|_X$ 得

$$\|Tx\|_Y \le cM\|x\|_X$$

则 T 有界.

2. 取 X 的一组 Hamel 基 $\{x_i\}_{i\in I}$. 由于 X 是无穷维，可取一个可数子集 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$. 任取 Y 中一个非零向量 y_0，定义线性算子 $T:X\to Y$ 在基上的作用为

$$T(x_n)=\begin{cases} ny_0 & n=1,2,\dots \\ 0 & \text{else} \end{cases}$$

然后线性延拓至整个 X. 由于在 X 中 $\|x_n\|$ 为某个正数（赋范空间中基向量的范数不一定趋于 0，但每个 x_n 非零），而 $\|T(x_n)\|=n\|y_0\|\to\infty$，从而

$$\frac{\|T(x_n)\|}{\|x_n\|}=\frac{n\|y_0\|}{\|x_n\|}\to\infty,$$

故 T 不是有界算子（无界）. 因此，只要 X 是无穷维且 $Y\neq\{0\}$，总能构造出无界线性算子.

□

记从 X 到 Y 的全体有界线性算子的集合为 $\mathcal{L}(X,Y)$，特别地，记 $\mathcal{L}(X)=\mathcal{L}(X,X)$，$X^*=\mathcal{L}(X,K)$. 在 $\mathcal{L}(X,Y)$ 上定义加法和数乘满足 $(T+S)x=Tx+Sx,\quad (\lambda T)(x)=\lambda(Tx)$，则容易验证 $\mathcal{L}(X,Y)$ 具有线性结构. 再定义算子范数，对任意的 $T\in\mathcal{L}(X,Y)$，满足 $\|T\|_{X\to Y}=\sup\limits_{x\in X,x\neq 0}\dfrac{\|Tx\|_Y}{\|x\|_X}=\sup\limits_{x\in X,\|x\|=1}\|Tx\|_Y$，则

命题 1.4. *装备有 $\|\cdot\|_{X\to Y}$ 的 $\mathcal{L}(X,Y)$ 是赋范线性空间.*

证明. 正定性、齐次性由 $\|\cdot\|_Y$ 即刻得到.

对三角不等式，由 $\|T+S\|=\sup\limits_{x\in X,\|x\|_X=1}\|(T+S)x\|_Y=\sup\limits_{x\in X,\|x\|=1}\|Tx+Sx\|_Y\le\sup\limits_{x\in X,\|x\|=1}(\|Tx\|_Y+\|Sx\|_Y)\le\sup\limits_{x\in X,\|x\|=1}\|Tx\|_Y+\sup\limits_{x\in X,\|x\|=1}\|Sx\|_Y=\|T\|+\|S\|$ 得. □

定理 1.5. *设 $(\mathcal{L}(X,Y),\|\cdot\|_{X\to Y})$ 是赋范空间，则*

- *若 Y 完备，则 $\mathcal{L}(X,Y)$ 完备；*
- *X^* 一定是 Banach 空间.*

证明. • 设 $\{T_n\}_{n=1}^{\infty}\subseteq\mathcal{L}(X,Y)$ 是基本列. 则对任意的 $\varepsilon>0$，都存在 N，使得任意的 $m,n>N$ 成立 $\|T_m-T_n\|_{X\to Y}=\sup\limits_{x\in X,\|x\|=1}\|(T_m-T_n)x\|<\varepsilon$. 从而任意的 $x\in X$ 都有 $\|(T_m-T_n)x\|\le\varepsilon\|x\|$. 固定 x，则 $\{T_nx\}_{n=1}^{\infty}$ 是 Y 中的基本列，由 Y 的完备性，$T_nx\to y\in Y$. 定义 $T:X\to Y, x\mapsto y$，显然 T 是线性的.

由三角不等式 $\|T_nx-Tx\|\le\|T_nx-T_mx\|+\|T_mx-Tx\|$，当 m,n 足够大且 $m\to\infty$ 时，$\|T_nx-T_mx\|\le\varepsilon\|x\|$，$\|T_mx-Tx\|\to 0$，所有对足够大的 n 成立 $\|T_nx-Tx\|\le\varepsilon\|x\|$，也就是 $\|Tx\|\le\|T_nx\|+\varepsilon\|x\|$，由 T_n 有界进一步得 $\|Tx\|\le(\|T_n\|+\varepsilon)\|x\|$，从而 T 有界. 同时，$\sup\limits_{x\in X,x\neq 0}\dfrac{\|T_nx-Tx\|}{\|x\|}\le\varepsilon$ 对足够大的 n 成立，从而 $\|T_n-T\|\to 0,\quad n\to\infty$.

□

2 Riesz 表示定理

H 为 Hilbert 空间，对 $y \in H$，可以定义 $f_y : H \to \mathbb{K}$ 满足 $f_y(x) = \langle x, y\rangle$，　$x \in H$. 则由 Cauchy-Schwarz 不等式得 $|f_y(x)| = |\langle x, y\rangle| \le \|y\| \|x\|$，即 f_y 为有界线性泛函，$f_y \in H^*$. 显然有 $\|f_y\| \le \|y\|$，另一方面，$\|y\|^2 = |\langle y, y\rangle| = |f_y(y)| \le \|f_y\| \|y\| \Rightarrow \|y\| \le \|f_y\|$，故 $\|y\| = \|f_y\|$. 那么，反过来是否成立呢？也就是说，对任意的有界线性泛函 $f \in H^*$，是否存在 $y \in H$，对任意 $x \in H$ 满足 $f(x) = \langle x, y\rangle$ 呢？答案是肯定的. 我们有以下命题.

定理 2.1 (Riesz 表示定理)**.** *任意 $f \in H^*$，存在唯一的 $y_f \in H$ 使得 $f(x) = \langle x, y_f\rangle$ 对任意 $x \in H$ 皆成立，且 $\|y_f\| = \|f\|$.*

可以把这个定理放到 $\mathbb{R}^n$ 中看. 在 $\mathbb{R}^n$ 中，有界线性泛函自然长成向量内积的形式 $f(\mathbf{x}) = a_1x_1 + \cdots + a_nx_n = \langle \mathbf{x}, \mathbf{a}\rangle$，问题就是怎么找到那个 $\mathbf{a}$. $f(\mathbf{x}) = 0$ 在 $\mathbb{R}^n$ 中确定了一个平面，$\mathbf{a}$ 就是这个平面的法矢量，对一切 $\mathbf{x} \in \ker f$ 满足 $\langle \mathbf{x}, \mathbf{a}\rangle = 0$.

证明. 若 $f = 0$, 取 $y_f = 0$ 即可. 若 $f \ne 0$, 则 $\ker f \ne H$. 连续映射对闭集的原像为闭集, 故 $\ker f$ 为闭子空间. 于是 $(\ker f)^\perp \ne \{0\}$, 存在 $y_0 \in (\ker f)^\perp$ 且 $\|y_0\| = 1$. 对任意的 x, $f\left[x - \dfrac{f(x)}{f(y_0)}y_0\right] = f(x) - \dfrac{f(x)}{f(y_0)}f(y_0) = 0$, 故 $x - \dfrac{f(x)}{f(y_0)}y_0 \in \ker f$. 从而 $\left\langle x - \dfrac{f(x)}{f(y_0)}y_0, y_0\right\rangle = 0$，即 $\langle x, y_0\rangle - \dfrac{f(x)}{f(y_0)}\|y_0\|^2 = \langle x, y_0\rangle - \dfrac{f(x)}{f(y_0)} = 0$，故 $f(x) = \left\langle x, \overline{f(y_0)}y_0\right\rangle$，于是找到了 $y_f = \overline{f_y}y_0$. □

定理 2.2. *H 为 Hilbert 空间，$a(\cdot,\cdot)$ 为 H 上的共轭双线性函数，若存在 $C > 0$ 使得 $|a(x, y)| \le C\|x\|\|y\|$ 对一切 $x, y \in H$ 均成立. 则存在 $A \in \mathcal{L}(H)$ 使得 $a(x, y) = \langle x, Ay\rangle$ 且 $\|A\| = \sup\limits_{x,y\in H x,y\ne 0} \dfrac{|a(x,y)|}{\|x\|\|y\|}$.*

证明. 固定 $y \in H$，定义 $F_y(x) = a(x, y)$，由 $|F_y(x)| = |a(x, y)| \le C\|y\|\|x\|$ 可知 F_y 连续且 $\|F_y\| \le C\|y\|$. 由 Riesz 表示定理，存在唯一的 $z \in H$ 使得 $F_y(x) = \langle x, z\rangle$ 对任意 $x \in H$ 成立，且 $\|z\| = \|F_y\|$. 定义 $A : H \to H$，　$y \mapsto z$，则 $a(x, y) = F_y(x) = \langle x, Ay\rangle$. 显然 A 是线性的. 其次，对任意的 $y \in H$ 有 $\|Ay\| = \|z\| = \|F_y\| \le C\|y\|$，故 A 有界. 最后，$\|A\| = \sup\limits_{y\in Hy\ne 0} \dfrac{\|Ay\|}{\|y\|} = \sup\limits_{y\in Hy\ne 0} \dfrac{\|F_y\|}{\|y\|} \le \sup\limits_{x,y\in Hx,y\ne 0} \dfrac{|a(x,y)|}{\|x\|\|y\|}$. 另一方面, $|a(x, y)| = |\langle x, Ay\rangle| \le \|x\|\|Ay\| \le \|A\|\|x\|\|y\|$ 对任意 $x, y \le H$ 成立, 故 $\sup\limits_{x,y\in Hx,y\ne 0} \dfrac{|a(x,y)|}{\|x\|\|y\|} \le \|A\|$. □

3 Baire 纲定理

定义 3.1. (X, d) 是度量空间，$E \subseteq X$，若 $\overline{E}$ 无内点，即没有一个开集能包含在 $\overline{E}$ 中，则称 E 为无处稠密集或疏朗集.

例 3.1. $\overline{\mathbb{Q}} = \mathbb{R}$，故 $\mathbb{Q}$ 不是疏朗集.

例 3.2. Contor 三分集是疏朗集.

定义 3.2. 设 (X, d) 为度量空间. 可数个疏朗集的并集称为第一纲集，不是第一纲集的集合为第二纲集，第一纲集的补集为剩余集.

下面我们引入分析中尤为重要的 Baire 纲定理.

定理 3.1 (Baire 纲定理，BCT)**.** *完备的度量空间一定是第二纲集.*

要证明这一定理，我们需要引入如下引理，它就是数学分析中闭区间套定理的推广

引理 3.2 (闭集套定理). (X,d) 完备，一列闭球 $\{B_k\}_{k=1}^{\infty}$ 满足

- $B_{k+1} \subseteq B_k$;
- B_k 的直径趋于 0.

则 $\bigcap_{k=1}^{\infty} B_k = \{x_0\}$，其中 $x_0 \in X$.

证明. 设 $B_k = \overline{B(x_k, r_k)}, \quad k = 1, 2, \cdots, n$. 任意的 $n > m$，$x_n \in B_n \subseteq B_m$，当 $n, m \to \infty$ 时 $d(x_m, x_n) < r_m \to 0$, 故 $\{x_k\}_{k=1}^{\infty}$ 为 Cauchy 列, 由完备性 $x_k \to x_0$, 由 B_m 闭知 $x_0 \in B_m$ 对任意 m 成立. 从而 $x_0 \in \bigcap_{n=0}^{\infty} B_n$.

下面证唯一性. 若 $y \in \bigcap_{n=1}^{\infty} B_n$，则 $d(x_0, y) \leq d(x_0, x_n) + d(x_n, y) \leq 2r_n \to 0, \quad n \to \infty$. □

BCT 的证明如下

证明. 假设 X 是第二纲的，$X = \bigcup_{k=1}^{\infty} E_k$，其中 E_k 是疏朗集. 任取开球 $B(x_0, r_0)$，由 E_1 疏朗可知存在 $B(x_1, r_1) \subseteq B(x_0, r_0), \quad r_1 < 1$ 使得 $\overline{B(x_1, r_1)} \cap \overline{E_1} = \emptyset$. $\text{int}(\overline{E_1}) = \emptyset$，故 $B(x_0, r_0)$ 不会完全落在 $\overline{E_1}$ 中，从而存在 $x_1 \in B(x_0, r_0) - \overline{E_1}$. 而 $B(x_0, r_0) - \overline{E_1}$ 为开集，故存在 r_1 使得 $\overline{B(x_1, r_1)} \subseteq B(x_0, r_0) - \overline{E_1}$，从而 $\overline{B(x_1, r_1)} \cap \overline{E_1} = \emptyset$. 因为 E_2 为疏朗集，存在 $B(x_2, r_2) \subseteq B(x_1, r_1), \quad r_2 < \frac{1}{2}$ 使得 $\overline{B(x_2, r_2)} \cap \overline{E_2} = \emptyset$，依此类推，得到一列闭球 $\overline{B(x_1, r_1)} \supseteq \overline{B(x_2, r_2)} \supseteq \cdots$. 由闭球套定理，$\bigcap_{k=1}^{\infty} \overline{B(x_k, r_k)} = \{x\}, \quad x_0 \in X$. 而 $x \in \overline{B(x_k, r_k)}, \quad \forall k$，故 $x \notin \overline{E_k}, \quad \forall k$，从而 $x \notin \bigcup_{k=1}^{\infty} \overline{E_k} = X$，矛盾! □

我们来看纲推理的两个应用. 证明有限维 Hilbert 空间有至多可数的 ONB 时，我们利用了其 Hamel 基的可数性. 事实上，无穷维 Hilbert 空间的 Hamel 基一定不可数，我们有

命题 3.3. l^2 的 *Hamel* 基不可数.

证明. 假设存在一组可数 Hamel 基 $B = \{x_k\}_{k=1}^{\infty}$. 令 $X_n = \{x_1, \cdots, x_n\}$，则 X_n 闭且 $l^2 = \bigcup_{n=1}^{\infty} X_n$（$l^2$ 中任意的元素都可以用 Hamel 基中有限个元素线性表出）. 由 BCT，存在 n_0 使得 X_{n_0} 有内点，矛盾！因为真子空间上的点都是边界点. □

推论. 多项式全体组成的向量空间 P 赋予任何范数都不是 *Banach* 空间.

证明. P 有可数的 Hamel 基 $\{1, x, x^2, \cdots\}$ □

数学分析中我们学过，Weierstrass 构造了一个处处连续却处处不可微的病态函数. 下面的定理告诉我们，这样的病态函数不仅存在，而且在 Baire 纲的意义下是很“多”的.

定理 3.4 (Weierstrass). A 为 $C[0,1]$ 中处处不可微的函数的集合，则 A 为第二纲集.

证明. 显然第一纲集的并依然是第一纲集，所以要证 A 是第二纲集，只需证明 $X - A$ 是第一纲集，否则 $X = A \cup (X - A)$ 是第一纲集，与 BCT 矛盾.

$X-A$ 是 $C[0,1]$ 中至少在一点 t 处可微的函数 f 的集合，则 $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(t+h)-f(t)}{h}=f'(t)$，对 1，存在 $\delta>0$ 使得 $h\in(-\delta,\delta)$ 时 $\left|\dfrac{f(t+h)-f(t)}{h}-f'(t)\right|<1$ 成立，进而 $\left|\dfrac{f(t+h)-f(t)}{h}\right|<|f'(t)|+1$. 取 $n>\max\left\{|f'(t)|+1,\dfrac{1}{\delta}\right\}$，则对 $h\in\left(-\dfrac{1}{n},\dfrac{1}{n}\right)\subseteq(-\delta,\delta)$ 有 $\left|\dfrac{f(t+h)-f(t)}{h}\right|<|f'(t)|+1<n$. 令

$$A_n=\left\{f\in C[0,1]:\exists t\in\left[\frac{1}{n},1-\frac{1}{n}\right]\ \text{s.t.}\sup_{t\in\left[-\frac{1}{n},\frac{1}{n}\right]}\left|\frac{f(t+h)-f(t)}{h}\right|\le n\right\}$$

则 $X-A\subseteq\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}A_n$. 我们需要证明每个 A_n 都是疏朗集.

首先证明 A_n 是闭集，从而 $\overline{A_n}=A_n$. 设 $A_n\ni f_k\rightrightarrows f,\quad k\to\infty$. 对每个 f_k，都存在 $t_k\in\left[\dfrac{1}{n},1-\dfrac{1}{n}\right]$ 使得 $\sup\limits_{h\in\left[-\frac{1}{n},\frac{1}{n}\right]}\left|\dfrac{f_k(t_k+h)-f_k(t_k)}{h}\right|\le n$，即 $|f_k(t_k+h)-f_k(t_k)|\le n|h|$ 对任意 $h\in\left[-\dfrac{1}{n},\dfrac{1}{n}\right]$ 都成立. $\{t_k\}_{k=1}^{\infty}$ 存在子列 $t_{k_j}\to t_0\in\left[\dfrac{1}{n},1-\dfrac{1}{n}\right]$. 于是 $|f(t_0+h)-f(t_0)|\le|f(t_0+h)-f(t_{k_j}+h)|+|f(t_{k_j}+h)-f_{k_j}(t_{k_j}+h)|+|f_{k_j}(t_{k_j}+h)-f_{k_j}(t_{k_j})|+|f_{k_j}(t_{k_j})-f(t_{k_j})|+|f(t_{k_j})-f(t_0)|$. $k_j\to\infty$ 时，由 f 的连续性可知第一、五项趋于 0，由 $f_{k_j}\rightrightarrows f$ 可知第二、四项趋于 0，而第三项始终小于等于 $n|h|$，故 $|f(t_0+h)-f(t_0)|\le n|h|$，$f\in A_n$. 所以 A_n 为闭集.

然后证明 A_n 无内点. 只需要证明任意的 $f\in A_n$ 和 $\varepsilon>0$ 都有 $B(f,\varepsilon)\cap A_n^c\ne\emptyset$. 也就是说，我们想要构造 φ 使得 $\|\varphi-f\|<\varepsilon$ 但任意的 $t\in\left[\dfrac{1}{n},1-\dfrac{1}{n}\right]$ 都存在 $h\in\left[-\dfrac{1}{n},\dfrac{1}{n}\right]$ 使得 $\left|\dfrac{\varphi(t+h)-\varphi(t)}{h}\right|>n$. 注意到只要 $|\varphi'(t)|>n$ 在除了有限个不可微点外成立，则对任意的 t 可以取合适的 h 使 φ 在 $[t,t+h]$ 上连续而在 $(t,t+h)$ 上可微，从而由 Lagrange 中值定理可知 $\left|\dfrac{\varphi(t+h)-\varphi(t)}{h}\right|=|\varphi'(\xi)|>n,\quad\xi\in(t,t+h)$. 我们需要 φ 与 f 足够接近，自然的想法是多项式逼近，存在 $p\in P[0,1]$ 使得 $\|f-p\|<\dfrac{\varepsilon}{2}$. 可是我们无法保证 $|p'(t)|>n$ 恒成立. 记 $M=\max\limits_{t\in[0,1]}|p'(t)|$. 我们考虑在多项式上再加一个扰动 $g(t)$，它必须满足 $\|g\|<\dfrac{\varepsilon}{2}$ 以保证 $\|p+g-f\|<\varepsilon$. 它还应该在有限个点外满足 $|g'(t)|>M+n$，从而 $|(p+g)'(t)|\ge|g'(t)|-|p'(t)|>M+n-M=n$. 这样的 $g(t)$ 可以通过三角波构造，把 $[0,1]$ 分成 K 份，用折线连结 $\left(0,-\dfrac{\varepsilon}{2}\right),\left(\dfrac{1}{2K},\dfrac{\varepsilon}{2}\right),\left(\dfrac{1}{K},-\dfrac{\varepsilon}{2}\right),\cdots,\left(1-\dfrac{1}{2K},\dfrac{\varepsilon}{2}\right),\left(1,-\dfrac{\varepsilon}{2}\right)$ 即可，只要 $2K\varepsilon>M+n$，就能满足要求. □

4 一致有界原理

定理 4.1 (一致有界原理（UBP）)**.** *设 X 为 Banach 空间，Y 为赋范空间，$\mathcal{F}\subseteq\mathcal{L}(X,Y)$. 若对任意的 $x\in X$ 都有 $\sup\limits_{T\in\mathcal{F}}\|Tx\|_Y<\infty$，则 $\sup\limits_{T\in\mathcal{F}}\|T\|<\infty$.*

等价地，若 $\sup\limits_{T\in\mathcal{F}}\|T\|=\infty$，则存在 $x_0\in X$ 使得 $\sup\limits_{T\in\mathcal{F}}\|Tx_0\|_Y=+\infty$.

这个定理告诉我们，算子族的逐点有界是蕴含一致有界的. 它的逆否命题则断言，如果算子族不是逐点有界的，则一定存在一个向量，算子族作用在它上面会得到无界的结果. 这就像物理上的共振现象. 当驱动力的频率与系统固有频率匹配时，即使驱动力很小，也能引起巨大的振动. 所以这个定理也叫“共鸣定理”.

证明. 令 $F_n=\{x\in X:\sup\limits_{T\in\mathcal{F}}\|Tx\|\le n\}=\bigcap\limits_{T\in\mathcal{F}}\{x\in X:\|Tx\|\le n\}$，交集的每一项都是闭集，故整体为闭集. 对任意的 $x\in X$，$\sup\limits_{T\in\mathcal{F}}\|Tx\|<\infty$，存在 n 使得 $x\in F_n$，故 $X=\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}F_n$. 由 Baire 纲定理，存在 n_0 使

得 F_{n_0} 有内点，记为 x_0，存在 r 使得 $B(x_0,r)\subseteq F_{n_0}$. 对任意的 $x\in B(0,1)$，$x_0+rx\in B(x_0,r)$，则对任意的 $T\in\mathcal{F}$，$\|T(x_0+rx)\|\leq n_0$. 但另一方面，$\|T(rx)\|\leq\|T(x_0+rx)\|+\|Tx_0\|\leq n_0+\|Tx_0\|\leq 2n_0$，从而 $\|Tx\|\leq\dfrac{2n_0}{r}$. 故 $\sup\limits_{T\in\mathcal{F}}\sup\limits_{x\in B(0,1)}\|Tx\|\leq\dfrac{2n_0}{r}$，而 $\|T\|=\sup\limits_{x\in B(0,1)}\|Tx\|$，所以 $\sup\limits_{T\in\mathcal{F}}\|T\|\leq\dfrac{2n_0}{r}$. □

共鸣定理有如下重要推论

定理 4.2 (Banach-Steinhaus)**.** *设 X 为 Banach 空间，Y 为赋范空间，$T,T_n\in\mathcal{L}(X,Y),\quad n=1,2,\cdots$. 则下面两点等价*

1. *任意 $x\in X$ 都有 $T_nx\to Tx$;*
2. *$\sup\limits_n\|T_n\|<\infty$ 且 $T_nx\to Tx$ 在 X 的某个稠密子集 M 上恒成立.*

证明. 1. $(2\Rightarrow 1)$ 任意 $x\in X$，存在 $\{x_k\}_{k=1}^{\infty}\subseteq M$ 使得 $x_k\to x$，则 $\|T_nx-Tx\|\leq\|T_nx-T_nx_k\|+\|T_nx_k-Tx_k\|+\|Tx_k-Tx\|\leq\|T_n\|\,\|x-x_k\|+\|T_nx_k-Tx_k\|+\|T\|\,\|x_k-x\|\leq(\sup\limits_n\|T_n\|+\|T\|)\,\|x-x_k\|+\|T_nx_k-Tx_k\|$. 由于 $x_k\in M$，$n\to\infty$ 时 $\|T_nx_k-Tx_k\|\to 0$. 而 $k\to\infty$ 时前一项也为 0. 故 $\|T_nx-Tx\|\to 0$.

2. $T_nx\to Tx$ 若在 X 上成立则肯定在 M 上成立，由 UBP 又得 $\sup\limits_n\|T_n\|<\infty$，即证.

□

之前我们证明了 Fourier 级数在 L^2 范数意义下是收敛的，那它是否逐点收敛呢？答案是否定的，我们有如下定理

定理 4.3 (Du Bois-Reymond)**.** $S_nf=\sum\limits_{k=-n}^{n}\tilde{f}(k)e^{2\pi\mathrm{i}kx}$，*则存在 $f\in C(\mathbb{T})$ 使得 $\{S_nf(0)\}_{n=1}^{\infty}$ 发散.*

证明. 我们知道 $S_nf=(f*D_n)(x)=\displaystyle\int_{-\frac12}^{\frac12}f(t)D_n(x-t)\mathrm{d}t$, 其中 $D_n(t)=\sum\limits_{k=-n}^{n}e^{2\pi\mathrm{i}kt}=\dfrac{\sin[(2n+1)\pi t]}{\sin(\pi t)}$. 定义 $T_n:C(\mathbb{T})\to\mathbb{R},f\mapsto S_nf(0)$. 则显然 $|T_nf|=\left|\displaystyle\int_{-\frac12}^{\frac12}f(t)D_n(t)\mathrm{d}t\right|\leq\int_{-\frac12}^{\frac12}|f(t)D_n(t)|\mathrm{d}t\leq\frac12\|f\|\int_{-\frac12}^{\frac12}|D_n(t)|\mathrm{d}t=\frac12\|D_n\|_1\|f\|$.

我们声明 $\|T_n\|=\|D_n\|_1$，论证如下. 因为 D_n 在 $\left[-\dfrac12,\dfrac12\right)$ 只有有限个零点，故 $\operatorname{sgn}D_n$ 在 $\left[-\dfrac12,\dfrac12\right)$ 只有有限个间断点. 对任意的 $\varepsilon>0$，我们可以构造如(2)所示的函数，它在大部分点上等于 $\operatorname{sgn}D_n$ 但在 D_n 零点的邻域内为线性函数，且这些邻域的长度之和 $|I_n|<\dfrac{\varepsilon}{4n+3}$，显然 $\|f_\varepsilon\|=1$. 这样构造的 f_ε 可以使 $f_\varepsilon(t)D_n(t)\geq 0$ 且在 $\left[-\dfrac12,\dfrac12\right)-I_\varepsilon$ 上 $f_\varepsilon(t)D_n(t)=|D_n(t)|$ 而 I_ε 上 $f_\varepsilon(t)D_n(t)\leq|D_n(t)|$. 则

$$\begin{aligned}
|T_nf_\varepsilon|&=\left|\int_{-\frac12}^{\frac12}f_\varepsilon(t)D_n(t)\mathrm{d}t\right|\\
&=\int_{-\frac12}^{\frac12}f_\varepsilon(t)D_n(t)\mathrm{d}t\\
&\geq\int_{\left[-\frac12,\frac12\right)-I_\varepsilon}|D_n(t)|\mathrm{d}t-\int_{I_\varepsilon}|D_n(t)|\mathrm{d}t\\
&\geq\int_{\left[-\frac12,\frac12\right)}|D_n(t)|\mathrm{d}t-2\int_{I_\varepsilon}|D_n(t)|\mathrm{d}t\\
&\geq\|D_n\|_1-(2n+1)\cdot\frac{\varepsilon}{4n+3}
\end{aligned}$$

从而 $\|T_n\| \geq \dfrac{|T_n f_\varepsilon|}{\|f_\varepsilon\|} > \|D_n\|_1 - \varepsilon$ 对任意 ε 成立，即 $\|T_n\| \geq \|D_n\|_1$. 而 $\|D_n\|_1 = 2\displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} \left|\frac{\sin[(2n+1)\pi t]}{\sin(\pi t)}\right| \mathrm{d}t \geq 2\int_0^{\frac{1}{2}} \left|\frac{\sin[(2n+1)\pi t]}{\pi t}\right| \mathrm{d}t = \dfrac{2}{\pi}\displaystyle\int_0^{\frac{(2n+1)\pi}{2}} \left|\frac{\sin x}{x}\right| \mathrm{d}x \to +\infty, \quad n \to \infty$，故 $\sup\limits_n \|T_n\| = +\infty$. 由 UBP，存在 $f \in C(\mathbb{T})$ 使得 $\sup\limits_n |T_n f| = +\infty$，故 $\limsup\limits_{n\to\infty} |S_n f(0)| = +\infty$，$\{S_n f(0)\}_{n=1}^{\infty}$ 发散. □

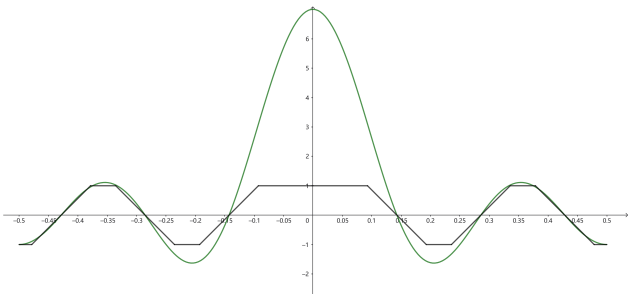


图 2: $f_\varepsilon \in C(\mathbb{T})$

5 开映射定理

在微分方程中，我们常常需要考察解的稳定性. 也就是说，$Tx = y$，当 y 变化很小时，相应的解 x 是否变化也很小. 这等价于在 T^{-1} 存在的前提下考察 T^{-1} 的连续性. 我们引入如下定理

定理 5.1 (逆算子定理（IMT）)**.** *X, Y 为 Banach 空间，$T \in \mathcal{L}(X,Y)$ 且 T 为双射，则 $T^{-1} \in \mathcal{L}(X,Y)$.*

它是如下定理的明显推论

定理 5.2 (开映射定理 (OMT))**.** *X, Y 为 Banach 空间，$T \in \mathcal{L}(X,Y)$ 且 T 为满射，则 T 是开映射，即 T 把开集映为开集.*

要证明这个定理，需要如下引理

引理 5.3. *X, Y 为 Banach 空间，$T \in \mathcal{L}(X,Y)$ 且 T 为满射，则存在 $\delta > 0$ 使得 $\delta B_Y \subseteq T(B_X)$，其中 δB_Y 为 Y 中半径为 δ 的球，B_X 为 X 中的单位球.*

证明. 首先，我们证明存在 $r > 0$ 使得 $rB_Y \subseteq \overline{T(B_X)}$. T 为满射，故 $Y = T(X) = T\left(\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} nB_X\right) = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} T(nB_X)$. Y 的闭包是自身，而并的闭包等于闭包的并，故 $Y = \overline{\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} T(nB_X)} = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} \overline{T(nB_X)}$. 由 Baire 纲定理，存在 n_0 使得 $\overline{T(n_0 B_X)}$ 有内点，故存在 $B(y_0, t) \subseteq \overline{T(n_0 B_X)}$. 令 $r = \dfrac{t}{n_0}$，对任意的 $z \in rB_Y$，$y_0 + n_0 z$ 与 $y_0 - n_0 z$ 皆落在 $B(y_0, t) \subseteq \overline{T(n_0 B_X)}$ 中. 所以存在 $\{x_k\}_{k=1}^{\infty}, \{x_k'\}_{k=1}^{\infty} \subseteq n_0 B_X$ 使得 $Tx_k \to y_0 + n_0 z, \quad Tx_k' \to y_0 - n_0 z$，从而 $T\left(\dfrac{x_k - x_k'}{2n_0}\right) \to z$，而 $\{\dfrac{x_k - x_k'}{2n_0}\}_{k=1}^{\infty} \subseteq B_x$，故 $z \in \overline{T(B_X)}$.

现在，对任意的 $y \in \dfrac{r}{3} B_Y, 3y \in rB_Y \subseteq \overline{T(B_X)}$，所以存在 $\tilde{x}_1 \in B_X$ 使得 $\|3y - T\tilde{x}_1\| < \dfrac{r}{3}$ 即 $\left\|y - T\dfrac{\tilde{x}_1}{3}\right\| < \dfrac{r}{9}$. 令 $y_1 = y - T\dfrac{\tilde{x}_1}{3}$ 使得 $\|9y_1 - T\tilde{x}_2\| < \dfrac{r}{3}$ 即 $\left\|y_1 - T\dfrac{\tilde{x}_2}{9}\right\| < \dfrac{r}{27}$. 令 $y_2 = y_1 - T\dfrac{\tilde{x}_2}{9}$，依此类推. 则

$\left\| y_k - T\frac{\tilde{x}_{k+1}}{3^{k+1}} \right\| < \frac{r}{3^{k+2}}$，$y_{k+1} = y_k - T\frac{\tilde{x}_{k+1}}{3^{k+1}}$，故 $y = y_n + T\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{\tilde{x}_k}{3^k}\right)$. 对任意的 p，当 $n \to \infty$ 时，$\left\| \sum_{k=n+1}^{n+p}\frac{\tilde{x}_k}{3^k} \right\| < \frac{\frac{1}{3^{n+1}}}{1-\frac{1}{3}} < \frac{1}{2^n} \to 0$，由 X 的完备性可知 $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\tilde{x}_k}{3^k} = x \in X$ 且 $\|x\| \le \left\| x - \sum_{k=1}^{n}\frac{\tilde{x}_k}{3^k} \right\| + \left\| \sum_{k=1}^{n}\frac{\tilde{x}_k}{3^k} \right\|$，在 n 充分大的时候，第一项小于 $\frac{1}{2}$，而第二项一直小于 $\frac{1}{2}$，故 $\|x\| < 1$，$x \in B_k$. 则 $n \to \infty$ 时 $\left\| y - T\sum_{k=1}^{n}\frac{\tilde{x}_k}{3^k} \right\| = \|y_n\| < \frac{\delta}{3^n} \to 0$. 所以 $y = T\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\tilde{x}_k}{3^k} = Tx$. □

下面我们来证明 OMT

证明. 对 X 中的开集 U，只需证明 $T(U)$ 是 Y 中的开集. 任取 $y \in T(U)$，存在 $x \in U$ 使得 $y = Tx$. 令 $V = U - x$，则 $0 \in V$ 是 V 的内点. 所以存在 $t > 0$ 使得 $tB_x \subseteq V$，即 $B_x \subseteq \frac{1}{t}V$. 由引理，存在 $\delta > 0$ 使得 $\delta B_Y \subseteq T(B_X) \subseteq \frac{1}{t}T(V)$，所以 0 是 $T(V)$ 的内点. 从而 $y = Tx$ 是 $T(U) = T(V) + Tx$ 的内点. □

(2.2)告诉我们有界的双线性函数可以诱导出有界线性映射，下面的命题告诉我们，如果对双线性函数作出一定限制，则诱导出的线性映射可逆，同时可以得到逆映射的界的一个估计.

定理 5.4 (Lax-Milgram). *H 为 Hilbert 空间，若 H 上的共轭双线性函数 $a(\cdot,\cdot): H \times H \to \mathbb{K}$ 满足*

- *（连续性）存在 $C > 0$ 使得 $\|a(x,y)\| \le C\|x\|\|y\|$ 对一切 $x, y \in H$ 成立；*
- *存在 $\delta > 0$ 使得 $\delta\|x\|^2 \le a(x,x)$ 对任意 $x \in H$ 成立.*

则存在唯一的 $A \in \mathcal{L}(H)$ 使得

- *对任意的 $x, y \in H$ 有 $a(x,y) = \langle x, Ay\rangle$;*
- *$A^{-1} \in \mathcal{L}(H)$ 且 $\left\|A^{-1}\right\| \le \frac{1}{\delta}$.*

证明. 定理(2.2)已经证明了满足第一条的 A 存在且唯一. 下面证明 A 是双射. 首先，设 $Ay = 0$，则 $a(y,y) = \langle y, Ay\rangle = 0$，从而 $\|y\|^2 \le \frac{1}{\delta}a(y,y) = 0$，$\|y\| = 0$，从而 A 为单射.

其次，类似可知，若 $\langle y, Ax\rangle = 0$ 对任意 $x \in H$ 成立则 $y = 0$，即 $(\operatorname{im} A)^{\perp} = \{0\}$. 若 $\operatorname{im} A$ 是 H 的闭子空间则 $H = \operatorname{im} A \oplus (\operatorname{im} A)^{\perp} = \operatorname{im} A$，从而 A 为满射. 设 $\{Ax_k\}_{k=1}^{\infty} \subseteq \operatorname{im} A$，$Ax_k \to y$，只需证明 $y \in \operatorname{im} A$. 由 $\delta\|x_n - x_m\|^2 \le a(x_n - x_m, x_n - x_m) = \langle x_n - x_m, Ax_n - Ax_m\rangle \le \|x_n - x_m\|\|Ax_n - Ax_m\|$，故对充分大的 m, n 有 $\|x_n - x_m\| \le \frac{1}{\delta}\|A(x_n - x_m)\| \to 0$，即 $\{x_k\}_{k=1}^{\infty}$ 为 Cauchy 列，于是存在 $x \in H$ 使得 $x_k \to x$，由 A 的连续性 $Ax_k \to Ax$，由极限的唯一性 $y = Ax \in \operatorname{im} A$.

现已证明 A 为双射，由 IMT，$A^{-1} \in \mathcal{L}(H)$. 且 $\left\|A^{-1}\right\| = \sup_{x\in H, \|x\|\neq 0}\frac{\left\|A^{-1}x\right\|}{\|x\|} = \sup_{y\in H, \|y\|\neq 0}\frac{\|y\|}{\|Ay\|} = \sup_{y\in H, \|y\|\neq 0}\frac{\|y\|^2}{\|Ay\|\|y\|}$，而对任意的 y 有 $\|Ay\|\|y\| \ge \langle Ay, y\rangle = a(y,y) \ge \delta\|y\|^2$，故 $\left\|A^{-1}\right\| \le \frac{1}{\delta}$. □

我们先前证明了有限维线性空间上所有范数都彼此等价的，对一般的 Banach 空间这一命题是不成立的. 但是，我们可以断言，Banach 空间上可比较强弱的范数都是彼此等价的，即

定理 5.5 (等价范数定理). *$(X, \|\cdot\|_1)$ 和 $(X, \|\cdot\|_2)$ 都完备，且 $\|\cdot\|_1 \lesssim \|\cdot\|_2$，则 $\|\cdot\|_1 \cong \|\cdot\|_2$.*

证明. 因为 $\|\cdot\|_1 \lesssim \|\cdot\|_2$，存在 $C > 0$ 使得 $\|x\|_1 \le C\|x\|_2$ 对任意 $x \in X$ 都成立. 这等价于说 $\mathrm{id} \in \mathcal{L}((X, \|\cdot\|_1), (X, \|\cdot\|_2))$. 由 IMT，$\mathrm{id}^{-1} = \mathrm{id} \in \mathcal{L}((X, \|\cdot\|_2), (X, \|\cdot\|_1))$，从而存在 $C' > 0$ 使得 $\|x\|_2 \le C'\|x\|_1$ 对任意 $x \in X$ 成立. 即 $\|\cdot\|_2 \lesssim \|\cdot\|_1$. 从而 $\|\cdot\|_1 \cong \|\cdot\|_2$. □

6 闭图像定理

之前我们考虑的线性映射 $T: X \to Y$ 都是定义在整个 X 上的，但一般 T 可以只定义在 X 的某个子空间上，这个子空间称为 T 的定义域，记作 $\mathrm{dom}\, T$. X 上的有界线性算子一定是定义在整个 X 上的，无界算子则不然. 我们希望把无界算子纳入泛函分析的框架，引入一种比有界算子更广的算子.

定义 6.1. $(X, \|\cdot\|_X)$ 和 $(Y, \|\cdot\|_Y)$ 为赋范空间，$X \times Y = \{(x, y) : x \in X, y \in Y\}$ 赋予范数 $\|(x, y)\|_{X\times Y} = \|x\|_X + \|y\|_Y$ 构成的赋范空间 $(X \times Y, \|\cdot\|_{X\times Y})$ 称为 X, Y 的乘积空间.

显然成立以下命题

命题 6.1. *若 X 和 Y 都完备，则 $X \times Y$ 也完备.*

定义 6.2. 设 $T: X \to Y$ 为线性算子，$\mathrm{Gr}\, T = \{(x, Tx) : x \in \mathrm{dom}\, T\} \subseteq X \times Y$ 称为 T 的图像. 若 $\mathrm{Gr}\, T$ 是 $X\times Y$ 的闭子空间, 则称 T 为闭算子. 等价地, 若 $\mathrm{dom}\, T \supseteq \{x_k\}_{k=1}^{\infty} \to x, \quad Tx_k \to y$ 则 $x \in \mathrm{dom}\, T, \quad y = Tx$.

注意，闭算子的定义中并不蕴含 $\mathrm{dom}\, T$ 闭. 闭集的定义要求 $\mathrm{dom}\, T \ni x_k \to x$ 可推出 $x \in \mathrm{dom}\, T$，而闭算子的定义中 $\mathrm{dom}\, T \ni x_k \to x$ 联合 $Tx_k \to y$ 才能推出 $x \in \mathrm{dom}\, T$. 这个定义确保算子的图像不会在某点处断开或跳跃，尽管定义域可以抠去某些点. 就像 $y = \dfrac{1}{x}, \quad x > 0$（当然这不是一个线性算子）的定义域不包含 0 但它的图像是一条连续的曲线. 而 $y = \begin{cases} x^2, & x \neq 0 \\ 1, & x = 0 \end{cases}$，尽管 $x \to 0$ 时 $y \to 0$ 但 $y(0) \neq 0$ 图像在这一点是断开的. 闭算子未必是有界的，下面我们举一个无界闭算子的例子

例 6.1. $T = \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} : C[0,1] \to C[0,1]$，我们之前已经证明过这个算子无界. 现在设 $C^1[0,1] \ni u_k \to u, \quad u_k' \to v$，则 $u_k(t) - u_k(0) \to u(t) - u(0)$. 另一方面，$u_k(t) - u_k(0) = \displaystyle\int_0^t u_k'(\xi)\mathrm{d}\xi$，由一致收敛函数列取极限与积分可换序，$u_k(t) - u_k(0) \to \displaystyle\int_0^t v(\xi)\mathrm{d}\xi$. 于是，$u(t) - u(0) = \displaystyle\int_0^t v(\xi)\mathrm{d}\xi$，由变上限积分的性质，$u(t) \in C^1[0,1]$ 且 $u'(t) = v(t)$. 故 T 为闭算子.

那反过来，有界算子是否一定是闭的呢？首先，若定义域本身是闭的，答案是肯定的. 有如下命题

命题 6.2. *T 有界，$\mathrm{dom}\, T$ 为 X 的闭子空间，则 T 是闭算子.*

证明是显然的.

证明. 若 $\mathrm{dom}\, T \ni x_k \to x$，因为 $\mathrm{dom}\, T$ 闭，则 $x \in \mathrm{dom}\, T$. T 有界，则 $Tx_k \to Tx$. 若 $Tx_k \to y$，由极限的唯一性得 $y = Tx$. □

若定义域不是闭的，则可以将其保范延拓到闭集上，从而成为闭算子. 有定理

定理 6.3 (有界线性算子的延拓定理（BLT）)**.** *设 X 为赋范空间，Y 为 Banach 空间，$T \in \mathcal{L}(\mathrm{dom}\, T, Y)$，则存在唯一的 $\tilde{T} \in \mathcal{L}(\overline{\mathrm{dom}\, T}, Y)$ 使得 $\tilde{T}|_{\mathrm{dom}\, T} = T$ 且 $\left\|\tilde{T}\right\| = \|T\|$.*

证明. 任取 $x \in \overline{\mathrm{dom}\, T}$, 存在 $\mathrm{dom}\, T \ni x_n \to x$. 因为 T 有界, 当 m, n 充分大时 $\|Tx_m - Tx_n\| \leq \|T\| \, \|x_n - x_m\| \to 0$，故 $\{Tx_n\}_{n=1}^{\infty}$ 为 Y 中的 Cauchy 列，由 Y 完备，$Tx_n \to y \in Y$，定义 $\tilde{T}x = y$.

设 $\mathrm{dom}\, T \ni x_n' \to x$，则 $n \to \infty$ 时 $\|Tx_n' - y\| \leq \|Tx_n' - Tx_n\| + \|Tx_n - y\| \leq \|T\|\,(\|x_n' - x\| + \|x - x_n\|) + \|Tx_n - y\| \to 0$. 从而 $Tx_n' \to y$. 即 y 不依赖于 $\{x_n\}$ 的选取，$\tilde{T}$ 是良定义的. 此外，容易验证 $\tilde{T}$ 是线性的.

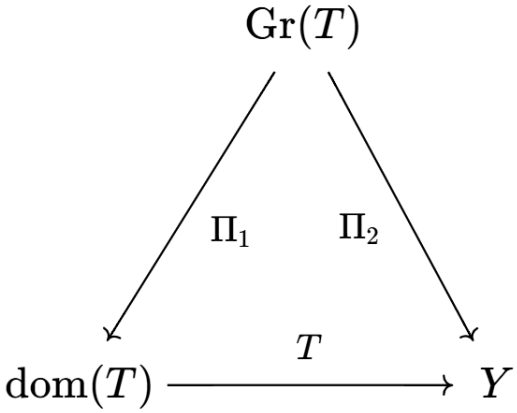


图 3: 将 $\operatorname{Gr} T$ 投影到 $\operatorname{dom} T$ 和 Y 上

任取 $x \in \operatorname{dom} T$, 则 $\left\|\tilde{T}\right\| \geq \dfrac{\left\|\tilde{T}x\right\|}{\|x\|} = \dfrac{\|Tx\|}{\|x\|}$, 故 $\left\|\tilde{T}\right\| \geq \sup\limits_x \dfrac{\|Tx\|}{\|x\|} = \|T\|$. 另一方面, 任取 $x \in \overline{\operatorname{dom} T}$, 存在 $\operatorname{dom} T \ni x_k \to x$, 则 $\dfrac{\|Tx_k\|}{\|x_k\|} \leq \|Tb\|$, 故 $\lim\limits_{k\to\infty} \dfrac{\|Tx_k\|}{\|x_k\|} \leq \|T\|$, 故 $\dfrac{\left\|\tilde{T}x\right\|}{\|x\|} \leq \|T\|$, 从而 $\left\|\tilde{T}\right\| = \sup\limits_x \dfrac{\left\|\tilde{T}x\right\|}{\|x\|} \leq \|T\|$. 于是 $\left\|\tilde{T}\right\| = \|T\|$. □

所以，在保范延拓的意义上，线性有界算子都是闭算子. 此外，显然会有如下推论

推论. 稠定（定义域在 X 中稠密）的有界线性算子可唯一地保范延拓到全空间.

那么，我们自然要问，闭算子什么时候有界？这个问题的答案由以下定理给出

定理 6.4 (闭图像定理（CGT）)**.** *X, Y 为 Banach 空间，$T : X \to Y$ 为闭线性算子，$\operatorname{dom} T$ 闭，则 T 有界.*

我们给出两个证明. 第一个证明是考虑投影映射

证明. $\operatorname{Gr} T$ 在 $X \times Y$ 中为闭集，从而为 Banach 空间. 如图(3)，考虑

$$\Pi_1 : \operatorname{Gr} T \to \operatorname{dom} T, \quad (x, Tx) \mapsto x$$

$$\Pi_2 : \operatorname{Gr} T \to Y, \quad (x, Tx) \mapsto Tx$$

以及 $T = \Pi_2^{-1} \circ \Pi_1$. 因为 $\|Tx\|_Y \leq \|Tx\|_Y + \|x\|_X = \|(x, Tx)\|_{X\times Y}$，$\Pi_2$ 有界. 同理 Π_1 有界. 而 Π_1 为双射，且由 $\operatorname{dom} T$ 闭可知其为 Banach 空间，由 IMT 得 Π_1^{-1} 有界，从而 T 有界. □

另一种证明是利用等价范数定理

证明. 引入 X 上的另一范数 $\|x\|_1 = \|x\|_X + \|Tx\|_Y$. T 为闭算子，故 $\operatorname{Gr} T$ 为 Banach 空间，从而 $(X, \|\cdot\|_1)$ 也完备，因为 Π_1 是保距同构. 显然对任意的 x 都有 $\|x\|_X \leq \|x\|_X + \|Tx\|_Y = \|x\|_1$，即 $\|\cdot\|_X \lesssim \|\cdot\|_1$. 由等价范数定理 $\|\cdot\|_1 \lesssim \|\cdot\|_X$，故存在 $C > 0$ 使得 $C(\|x\|_X + \|Tx\|_Y) \leq \|x\|_X$，从而 $\|Tx\|_Y \leq \dfrac{1-C}{C}\|x\|_X$，故 T 有界. □