数学准备与电磁学回顾

呜哩天才琪露诺

华中科技大学物理学院

日期：2024 年 8 月 6 日

1 矢量的点乘与叉乘

笛卡尔坐标系中矢量可作分解 $\mathbf{A}=A_i\mathbf{e}_i$，三维空间中基矢的点乘 $\mathbf{e}_i\mathbf{e}_j=\delta_{ij}$，故 $\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}=A_iB_i$. 三维空间中基矢的叉乘 $\mathbf{e}_i\cdot\times\mathbf{e}_j=\varepsilon_{ijk}\mathbf{e}_k$，故 $\mathbf{A}\times\mathbf{B}=\varepsilon_{ijk}\mathbf{e}_iA_jB_k$. 其中 Levi-Civita 符号定义为

$$\varepsilon_{ijk}=\begin{cases}0 & i,j,k\text{ 中有相同的}\\ 1 & i,j,k\text{ 按 1,2,3 轮换}\\ -1 & \text{其它}\end{cases}$$

Kronecker 符号与 Levi-Civita 符号的关系如下

$$\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{imn}=\delta_{jm}\delta_{kn}-\delta_{jn}\delta_{km}$$

有

定理 1.1.

$$\mathbf{A}\times(\mathbf{B}\times\mathbf{C})=(\mathbf{A}\cdot\mathbf{C})\mathbf{B}-(\mathbf{A}\cdot\mathbf{B})\mathbf{C}$$

证明.

$$\begin{aligned}\mathbf{A}\times(\mathbf{B}\times\mathbf{C}) &= \varepsilon_{ijk}\mathbf{e}_iA_j(\mathbf{B}\times\mathbf{C})_k\\ &= \varepsilon_{ijk}\mathbf{e}_iA_j(\varepsilon_{kmn}B_mC_n)\\ &= \varepsilon_{ijk}\varepsilon_{kmn}\mathbf{e}_iA_jB_mC_n\\ &= \mathbf{e}_i(\delta_{im}\delta_{jn}-\delta_{in}\delta_{jm})A_jB_mC_n\\ &= \mathbf{e}_iA_jB_iC_j-\mathbf{e}_iA_jB_jC_i\\ &= (\mathbf{A}\cdot\mathbf{C})B_i\mathbf{e}_i-(\mathbf{A}\cdot\mathbf{B})C_i\mathbf{e}_i\\ &= (\mathbf{A}\cdot\mathbf{C})\mathbf{B}-(\mathbf{A}\cdot\mathbf{B})\mathbf{C}\end{aligned}$$

□

矢量 $\mathbf{A},\mathbf{B}$ 和 $\mathbf{C}$ 的混合积为 $\mathbf{A}\cdot(\mathbf{B}\times\mathbf{C})$，它有如下性质

定理 1.2.

$$\mathbf{A}\cdot(\mathbf{B}\times\mathbf{C})=\mathbf{B}\cdot(\mathbf{C}\times\mathbf{A})=\mathbf{C}\cdot(\mathbf{A}\times\mathbf{B})$$

我们证明一下第一个等号

证明.

$$\begin{aligned}\mathbf{A}\cdot(\mathbf{B}\times\mathbf{C}) &= A_i(\mathbf{B}\times\mathbf{C})_i\\ &= A_i(\varepsilon_{ijk}B_jC_k)\\ &= B_j(\varepsilon_{ijk}A_iC_k)\\ &= B_j(\varepsilon_{jki}C_kA_i)\\ &= B_j(\mathbf{C}\times\mathbf{A})_j\\ &= \mathbf{B}\cdot(\mathbf{C}\times\mathbf{A})\end{aligned}$$

□

2 哈密顿算符

笛卡尔坐标系中的哈密顿算符为

$$\nabla = \mathbf{e}_i\frac{\partial}{\partial x_i}$$

∇ 具有矢量性和微分性. 可以把 $\dfrac{\partial}{\partial x_i}$ 看成 ∇ 的第 i 分量，但需要知道 $\dfrac{\partial}{\partial x_i}$ 也是求导，它对其后面的东西是有作用的.

定义 2.1 (标量场的梯度)**.**

$$\nabla\varphi = e_i\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}$$

定义 2.2 (矢量场的散度)**.**

$$\nabla\cdot\mathbf{A} = \frac{\partial}{\partial x_i}A_i$$

我们有必要明确一下这个是怎么来的

$$\begin{aligned}\left(\mathbf{e}_i\frac{\partial}{\partial x_i}\right)\cdot(\mathbf{e}_jA_j) &= \mathbf{e}_i\cdot\frac{\partial}{\partial x_i}(\mathbf{e}_jA_j)\\ &= \mathbf{e}_i\cdot\left(\frac{\partial\mathbf{e}_j}{\partial x_i}A_j+\mathbf{e}_j\frac{\partial A_j}{\partial x_i}\right)\\ &= \mathbf{e}_i\cdot\mathbf{e}_j\frac{\partial A_j}{\partial x_i}\end{aligned}$$

对笛卡尔坐标系，这个 $\dfrac{\partial\mathbf{e}_i}{\partial x_j}$ 是等于 0 的，所以没什么影响. 但要研究其它坐标系中矢量场的散度、旋度，则是必须考虑的.

定义 2.3 (矢量场的旋度)**.**

$$\nabla\times\mathbf{A} = \varepsilon_{ijk}\mathbf{e}_i\frac{\partial}{\partial x_j}B_k$$

对 ∇ 的运算规则，一般有两种证明方法. 其一是指标法，只要熟练地掌握偏导数的运算法则以及 Kronecker 符号与 Levi-Civita 符号的转化关系即可. 另一种是利用 ∇ 的矢量性和微分性. 下面举一例说明这两种方法.

例 2.1. 计算 $\nabla\times(\mathbf{A}\times\mathbf{B})$.

先用指标法进行计算：

$$\begin{aligned}
\nabla\times(\mathbf{A}\times\mathbf{B}) &= \varepsilon_{ijk}\mathbf{e}_i\frac{\partial}{\partial x_j}(\mathbf{A}\times\mathbf{B})_k \\
&= \varepsilon_{ijk}\mathbf{e}_i\frac{\partial}{\partial x_j}(\varepsilon_{kmn}A_mB_n) \\
&= \varepsilon_{ijk}\varepsilon_{kmn}\mathbf{e}_i\frac{\partial}{\partial x_j}(A_mB_n) \\
&= \varepsilon_{kij}\varepsilon_{kmn}\mathbf{e}_i\left(\frac{\partial A_m}{\partial x_j}B_n+\frac{\partial B_n}{\partial x_j}A_m\right) \\
&= (\delta_{im}\delta_{jn}-\delta_{in}\delta_{jm})\mathbf{e}_i\left(\frac{\partial A_m}{\partial x_j}B_n+\frac{\partial B_n}{\partial x_j}A_m\right) \\
&= \mathbf{e}_i\left(\frac{\partial A_i}{\partial x_j}B_j+\frac{\partial B_j}{\partial x_j}A_i\right)-\mathbf{e}_i\left(\frac{\partial A_j}{\partial x_j}B_i+\frac{\partial B_i}{\partial x_j}A_j\right) \\
&= [(\nabla\cdot\mathbf{B})+(\mathbf{B}\cdot\nabla)]\mathbf{A}-[(\nabla\cdot\mathbf{A})+(\mathbf{A}\cdot\nabla)]\mathbf{B}
\end{aligned}$$

然后，我们用 ∇ 的矢量性和微分性计算. 首先，∇ 的作用可以分为 ∇_A 和 ∇_B，前者只作用于 $\mathbf{A}$，后者只作用于 $\mathbf{B}$. 于是

$$\begin{aligned}
\nabla\times(\mathbf{A}\times\mathbf{B}) &= \nabla_A\times(\mathbf{A}\times\mathbf{B})+\nabla_B\times(\mathbf{A}\times\mathbf{B}) \\
&= (\nabla_A\cdot\mathbf{B})\mathbf{A}-(\nabla_A\cdot\mathbf{A})\mathbf{B}+(\nabla_B\cdot\mathbf{B})\mathbf{A}-(\nabla_B\cdot\mathbf{A})\mathbf{B}
\end{aligned}$$

其中用了矢量叉积和点积的关系. 由于 ∇ 的微分性，∇ 和矢量是不能随便换位置的，但 ∇_A 不作用于 $\mathbf{B}$，所以二者可以易位，即 $\nabla_A\cdot\mathbf{B}=\mathbf{B}\cdot\nabla_A$，对 ∇_B 亦然. 于是

$$\nabla\times(\mathbf{A}\times\mathbf{B})=(\mathbf{B}\cdot\nabla)\mathbf{A}-(\nabla\cdot\mathbf{A})\mathbf{B}+(\nabla\cdot\mathbf{B})\mathbf{A}-(\mathbf{A}\cdot\nabla)\mathbf{B}$$

这里把 ∇_A 和 ∇_B 又改回 ∇，是因为它们的后面只有对应的矢量场，∇_A 和 ∇ 作用在 $\mathbf{A}$ 上的效果是相同的.

我们将 ∇ 的常用性质开列如下

1. $\nabla(\varphi\psi)=\varphi\nabla\psi+\psi\nabla\varphi$
2. $\nabla\cdot(\varphi\mathbf{f})=(\nabla\varphi)\cdot\mathbf{f}+\varphi\nabla\cdot\mathbf{f}$
3. $\nabla\times(\varphi\mathbf{f})=(\nabla\varphi)\times\mathbf{f}+\varphi\nabla\times\mathbf{f}$
4. $\nabla\cdot(\mathbf{f}\times\mathbf{g})=(\nabla\times\mathbf{f})\cdot\mathbf{g}-\mathbf{f}\cdot(\nabla\times\mathbf{g})$
5. $\nabla\times(\mathbf{f}\times\mathbf{g})=(\mathbf{g}\cdot\nabla)\mathbf{f}-(\nabla\cdot\mathbf{f})\mathbf{g}+(\nabla\cdot\mathbf{g})\mathbf{f}-(\mathbf{f}\cdot\nabla)\mathbf{g}$
6. $\nabla(\mathbf{f}\cdot\mathbf{g})=\mathbf{f}\times(\nabla\times\mathbf{g})+(\mathbf{f}\cdot\nabla)\mathbf{g}+\mathbf{g}\times(\nabla\times\mathbf{f})+(\mathbf{g}\cdot\nabla)\mathbf{f}$
7. $\nabla\cdot\nabla\varphi=\Delta\varphi$
8. $\nabla\times(\nabla\times\mathbf{f})=\nabla(\nabla\cdot\mathbf{f})-\Delta\mathbf{f}$

3 球坐标系和柱坐标系中的哈密顿算符

由 $\mathrm{d}\varphi=\mathrm{d}x_i\dfrac{\partial\varphi}{\partial x_i}=\left(\mathbf{e}_x\dfrac{\partial\varphi}{\partial x}+\mathbf{e}_y\dfrac{\partial\varphi}{\partial y}+\mathbf{e}_z\dfrac{\partial\varphi}{\partial z}\right)\cdot(\mathbf{e}_x\mathrm{d}x+\mathbf{e}_y\mathrm{d}y+\mathbf{e}_z\mathrm{d}z)=\mathrm{d}\mathbf{r}\cdot\nabla\varphi$，可以形式化地写

$$\mathrm{d}=\mathrm{d}\mathbf{r}\cdot\nabla$$

在球坐标系中，直观上很容易知道 $\mathrm{d}\mathbf{r}=\mathrm{d}R\mathbf{e}_R+R\mathrm{d}\theta\mathbf{e}_\theta+R\sin\theta\mathrm{d}\phi\mathbf{e}_\phi$，设 ∇ 在球坐标下的形式为

$\nabla = A\mathbf{e}_R + B\mathbf{e}_\theta + C\mathbf{e}_\phi$，则

$$\begin{aligned} \mathrm{d} &= (\mathrm{d}R\mathbf{e}_R + R\mathrm{d}\theta\mathbf{e}_\theta + R\sin\theta\mathrm{d}\phi\mathbf{e}_\phi)\cdot(A\mathbf{e}_R + B\mathbf{e}_\theta + C\mathbf{e}_\phi) \\ &= A\mathrm{d}R + BR\mathrm{d}\theta + CR\sin\theta\mathrm{d}\phi \end{aligned}$$

按偏导数与全微分的关系

$$A = \frac{\partial}{\partial R}, B = \frac{\partial}{R\partial\theta}, C = \frac{\partial}{R\sin\theta\partial\phi}$$

于是

$$\nabla = \mathbf{e}_R\frac{\partial}{\partial R} + \mathbf{e}_\theta\frac{\partial}{R\partial\theta} + \mathbf{e}_\phi\frac{\partial}{R\sin\theta\partial\phi}$$

将 $\nabla\cdot\mathbf{A} = \left(\mathbf{e}_R\dfrac{\partial}{\partial R} + \mathbf{e}_\theta\dfrac{\partial}{R\partial\theta} + \mathbf{e}_\phi\dfrac{\partial}{R\sin\theta\partial\phi}\right)\cdot(A_R\mathbf{e}_R + A_\theta\mathbf{e}_\theta + A_\phi\mathbf{e}_\phi)$ 展开后将会出现 $\dfrac{\partial\mathbf{e}_R}{\partial R}$ 之类的项，对笛卡尔坐标系这些都等于 0，但对球坐标系不是这样. 在球坐标系中，几何上容易知道

$$\mathbf{e}_R = \sin\theta\cos\phi\mathbf{e}_x + \sin\theta\sin\phi\mathbf{e}_y + \cos\theta\mathbf{e}_z$$

$$\mathbf{e}_\phi = -\sin\phi\mathbf{e}_x + \cos\phi\mathbf{e}_y$$

从而

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_\theta &= \mathbf{e}_\phi\times\mathbf{e}_R \\ &= \begin{vmatrix} \mathbf{e}_x & \mathbf{e}_y & \mathbf{e}_z \\ -\sin\phi & \cos\phi & 0 \\ \sin\theta\cos\phi & \sin\theta\sin\phi & \cos\theta \end{vmatrix} \\ &= \cos\phi\cos\theta\mathbf{e}_x + \sin\phi\cos\theta\mathbf{e}_y - \sin\theta\mathbf{e}_z \end{aligned}$$

所以

$$\frac{\partial\mathbf{e}_R}{\partial R} = 0$$

$$\frac{\partial\mathbf{e}_R}{\partial\theta} = \cos\theta\cos\phi\mathbf{e}_x + \cos\theta\sin\phi\mathbf{e}_y - \sin\theta\mathbf{e}_z = \mathbf{e}_\theta$$

$$\frac{\partial\mathbf{e}_R}{\partial\phi} = -\cos\theta\sin\phi\mathbf{e}_x + \cos\theta\cos\phi\mathbf{e}_y = \sin\theta\mathbf{e}_\phi$$

$$\frac{\partial\mathbf{e}_\theta}{\partial R} = 0$$

$$\frac{\partial\mathbf{e}_\theta}{\partial\theta} = -\cos\phi\sin\theta\mathbf{e}_x - \sin\phi\sin\theta\mathbf{e}_y - \cos\theta\mathbf{e}_z = -\mathbf{e}_R$$

$$\frac{\partial\mathbf{e}_\theta}{\partial\phi} = -\sin\phi\cos\theta\mathbf{e}_x + \cos\phi\cos\theta\mathbf{e}_y = \cos\theta\mathbf{e}_\phi$$

$$\frac{\partial\mathbf{e}_\phi}{\partial R} = 0$$

$$\frac{\partial\mathbf{e}_\phi}{\partial\theta} = 0$$

$$\frac{\partial\mathbf{e}_\phi}{\partial\phi} = -\cos\phi\mathbf{e}_x - \sin\phi\mathbf{e}_y = -\cos\theta\mathbf{e}_\theta - \sin\theta\mathbf{e}_R$$

于是，计算可知

$$\nabla\cdot\mathbf{A} = \frac{1}{R^2}\frac{\partial}{\partial R}(R^2A_R) + \frac{1}{R\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}(\sin\theta A_\theta) + \frac{1}{R\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\phi}(A_\phi)$$

$$\nabla\times\mathbf{A} = \frac{1}{R\sin\theta}\left[\frac{\partial}{\partial\theta}(\sin\theta A_\phi) - \frac{\partial A_\theta}{\partial\phi}\right]\mathbf{e}_R + \frac{1}{R}\left[\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial A_R}{\partial\phi} - \frac{\partial(RA_\phi)}{\partial R}\right]\mathbf{e}_\theta + \frac{1}{R}\left[\frac{\partial(RA_\theta)}{\partial R} - \frac{\partial A_R}{\partial\theta}\right]\mathbf{e}_\phi$$

在柱坐标系中，用同样的道理，可以推出

$$\nabla\varphi = \mathbf{e}_r\frac{\partial\varphi}{\partial r} + \mathbf{e}_\phi\frac{\partial\varphi}{r\partial\phi} + \mathbf{e}_z\frac{\partial\varphi}{\partial z}$$

$$\nabla\cdot\mathbf{A} = \frac{\partial}{r\partial r}(rA_r) + \frac{\partial A_\phi}{r\partial\phi} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$$

$$\nabla\times\mathbf{A} = \left(\frac{\partial A_z}{r\partial\phi} - \frac{\partial A_\phi}{\partial z}\right)\mathbf{e}_r + \left(\frac{\partial A_r}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial r}\right)\mathbf{e}_\phi + \frac{1}{r}\left[\frac{\partial(rA_\phi)}{\partial r} - \frac{\partial A_r}{\partial\phi}\right]$$

4 张量

在 N 维线性空间中引入线性变换 $x_i' = a_{ij}x_j$ 满足

$$\sum_{i=1}^{N} x_i^2 = \sum_{i=1}^{N} x_i'^2$$

线性代数中我们学过，这正是所谓正交变换，它满足

$$a_{ij}a_{ik} = \delta_{jk}$$

或

$$\mathbf{A}^T\mathbf{A} = \mathbf{I}$$

其中 $\mathbf{A} = \{a_{ij}\}_{N\times N}$. 正交变换对应的逆变换为 $x_i = a_{ji}x_j'$. 基矢的变换为 $\mathbf{e}_i' = a_{ij}\mathbf{e}_j$，变换后的基矢仍满足正交关系.

张量的阶数由正交变换时操作矩阵的个数规定. 对矢量是 $\mathbf{x}' = \mathbf{A}\mathbf{x}$，等式右边只有一个操作矩阵，所以矢量是一阶张量. 二阶张量 $\overleftrightarrow{T}$ 有 n^2 个分量，在正交变换下，其各分量按照以下方式进行变换

$$T_{ij}' = a_{im}a_{jn}T_{mn}$$

我们可以形式化地写 $\overleftrightarrow{T} = T_{ij}\mathbf{e}_i\mathbf{e}_j$，这里 $\mathbf{e}_i\mathbf{e}_j$ 只是形式上并在一起，不作任何运算. 在正交变换下

$$\overleftrightarrow{T}'_{ij} = T_{ij}'\mathbf{e}_i'\mathbf{e}_j' = T_{mn}a_{im}a_{jn}\mathbf{e}_i'\mathbf{e}_j' = T_{mn}\mathbf{e}_m\mathbf{e}_n = \overleftrightarrow{T}$$

对矢量 $\mathbf{f} = f_i\mathbf{e}_i$ 和 $\mathbf{g} = g_i\mathbf{e}_j$，并矢 $\mathbf{fg} = f_ig_j\mathbf{e}_i\mathbf{e}_j$ 是二阶张量. 显然，$\mathbf{AB} \neq \mathbf{BA}$.

并矢与矢量的点积定义为

$$(\mathbf{AB})\cdot\mathbf{C} = \mathbf{A}(\mathbf{B}\cdot\mathbf{C})$$

$$\mathbf{A}\cdot(\mathbf{BC}) = (\mathbf{A}\cdot\mathbf{B})\mathbf{C}$$

就像两个矢量点乘得到一个标量那样，并矢与矢量作点积，总阶数也减少 2（原本是一个并矢与一个矢量，阶数总共为 3，点积后为一个矢量，阶数为 1）. 这一点对所有点积都是适用的.

并矢与矢量的叉积定义为

$$(\mathbf{AB})\times\mathbf{C} = \mathbf{A}(\mathbf{B}\times\mathbf{C})$$

$$\mathbf{A}\times(\mathbf{BC}) = (\mathbf{A}\times\mathbf{B})\mathbf{C}$$

可以看到，并矢与矢量作叉积，总阶数减少 1. 这一点对所有叉积都是适用的.

并矢之间的单点积、双点积、叉积定义如下

$$(\mathbf{AB})\cdot(\mathbf{CD}) = \mathbf{A}(\mathbf{B}\cdot\mathbf{C})\mathbf{D}$$

$$(\mathbf{AB}):(\mathbf{CD}) = (\mathbf{B}\cdot\mathbf{C})(\mathbf{A}\cdot\mathbf{D})$$

$$(\mathbf{AB}) \times (\mathbf{CD}) = \mathbf{A}(\mathbf{B} \times \mathbf{C})\mathbf{D}$$

于是

1.
$$\mathbf{f} \cdot \overleftrightarrow{T} = \mathbf{e}_i f_i T_{ji}$$

2.
$$\overleftrightarrow{T} \cdot \mathbf{f} = \mathbf{e}_i T_{ij} f_j$$

3.
$$\overleftrightarrow{S} \cdot \overleftrightarrow{T} = \mathbf{e}_i \mathbf{e}_j S_{ik} T_{kj}$$

4.
$$\overleftrightarrow{S} : \overleftrightarrow{T} = S_{ij} T_{ji}$$

5.
$$\mathbf{f} \times \overleftrightarrow{T} = (\varepsilon_{imn} f_m T_{nj}) \mathbf{e}_i \mathbf{e}_j$$

6.
$$\overleftrightarrow{T} \times \mathbf{f} = (\varepsilon_{imn} f_n T_{jm}) \mathbf{e}_j \mathbf{e}_i$$

我们对第 2 和 6 条进行证明

证明. (2)

$$\begin{aligned}
\overleftrightarrow{T} \cdot \mathbf{f} &= (T_{ij} \mathbf{e}_i \mathbf{e}_j) \cdot (f_k \mathbf{e}_k) \\
&= T_{ij} f_k (\mathbf{e}_i \mathbf{e}_j) \cdot \mathbf{e}_k \\
&= T_{ij} f_k \mathbf{e}_i (\mathbf{e}_j \cdot \mathbf{e}_k) \\
&= T_{ij} f_k \mathbf{e}_i \delta_{jk} \\
&= \mathbf{e}_i T_{ij} f_j
\end{aligned}$$

(6)

$$\begin{aligned}
\overleftrightarrow{T} \times \mathbf{f} &= (\mathbf{e}_i \mathbf{e}_j T_{ij}) \times (f_k \mathbf{e}_k) \\
&= T_{ij} f_k (\mathbf{e}_i \mathbf{e}_j) \times \mathbf{e}_k \\
&= T_{ij} f_k \mathbf{e}_i (\mathbf{e}_j \times \mathbf{e}_k) \\
&= T_{ij} f_k \mathbf{e}_i \varepsilon_{ljk} \mathbf{e}_l \\
&= \varepsilon_{imn} f_n T_{jm} \mathbf{e}_j \mathbf{e}_i
\end{aligned}$$

□

对矢量场 $\mathbf{A}$，可以用 ∇ 对其进行并矢作用

$$\nabla \mathbf{A} = \frac{\partial f_j}{\partial x_i} \mathbf{e}_i \mathbf{e}_j$$

物理中也常见到张量场的散度

$$\begin{aligned}\nabla\cdot\overleftrightarrow{T} &= \left(\mathbf{e}_i\frac{\partial}{\partial x_i}\right)\cdot(T_{jk}\mathbf{e}_j\mathbf{e}_k)\\ &= \left(\mathbf{e}_i\frac{\partial}{\partial x_i}\right)\cdot(T_{jk}\mathbf{e}_j)\mathbf{e}_k\\ &= \mathbf{e}_i\cdot\left(\frac{\partial T_{jk}}{\partial x_i}\mathbf{e}_j\right)\mathbf{e}_k\\ &= \frac{\partial T_{ik}}{\partial x_i}\mathbf{e}_k\end{aligned}$$

5 矢量场的积分与 Delta 函数

场论中，我们熟悉

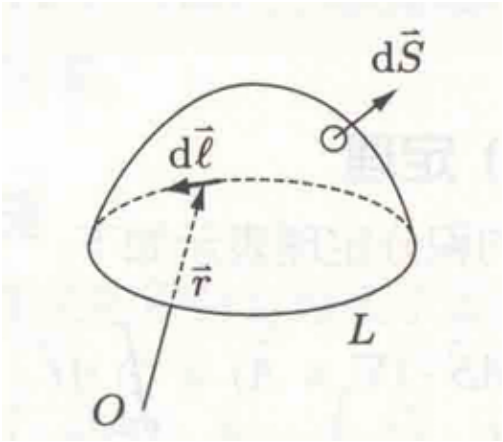
$$\oint_S \mathrm{d}\sigma\cdot\mathbf{A}=\iiint_V(\mathrm{d}V\nabla)\cdot\mathbf{A}$$
$$\oint_C \mathrm{d}\mathbf{l}\cdot\mathbf{A}=\iint_\Sigma(\mathrm{d}\sigma\times\nabla)\cdot\mathbf{A}$$

这里的 $\mathbf{A}$ 是任意矢量场，S 为区域 V 的边界，为闭合曲面. C 为曲面 Σ 的边界，为闭合曲线. 这里的 $\mathbf{A}$ 可以任意地替换为标量场或者张量场，点乘也可以换成叉乘或直接作用，从而形式化地有

$$\oint_S \mathrm{d}\sigma=\iiint_V(\mathrm{d}V\nabla)$$
$$\oint_C \mathrm{d}\mathbf{l}=\iint_\Sigma(\mathrm{d}\sigma\times\nabla)$$

矢量分析中证明的主要手段是从 Gauss 定理或 Stokes 定理出发，用常矢量点乘法进行证明. 下面举一例进行说明

例 5.1. 如图，对以闭合路径 L 为边界的一个面 S，定义 $\mathbf{S}=\int_S \mathrm{d}\mathbf{S}$ 为面上所有面元矢量之和. 证明 $\mathbf{S}=\frac{1}{2}\oint_L \mathbf{r}\times\mathrm{d}\mathbf{l}$，其中 $\mathbf{r}$ 为从坐标原点指向 $\mathrm{d}\mathbf{l}$ 的位矢量.



我们知道

$$\frac{1}{2}\oint_L \mathbf{r}\times\mathrm{d}\mathbf{l}=-\frac{1}{2}\oint_L \mathrm{d}\mathbf{l}\times\mathbf{r}$$

首先用常矢量法进行证明. 构造 $\mathbf{A}=\mathbf{r}\times\mathbf{n}$，其中 $\mathbf{n}$ 为任意的常矢量. 由 Stokes 公式

$$\int_S \mathrm{d}\mathbf{S}\cdot[\nabla\times(\mathbf{r}\times\mathbf{n})]=\oint_L(\mathrm{d}\mathbf{l}\times\mathbf{r})\cdot\mathbf{n}$$

另一方面

$$\nabla\times(\mathbf{r}\times\mathbf{n})=(\mathbf{n}\cdot\nabla)\mathbf{r}-(\nabla\cdot\mathbf{r})\mathbf{n}=-2\mathbf{n}$$

因此

$$-2\int_S \mathrm{d}\mathbf{S}\cdot\mathbf{n}=\oint_L(\mathrm{d}\mathbf{l}\times\mathbf{r})\cdot\mathbf{n}$$

$\mathbf{n}$ 是任意的常矢量，故原式得证.

我们也可以直接在形式化的 Stokes 公式两边同时添上 $\times\mathbf{r}$ 得

$$-\frac{1}{2}\oint_L \mathrm{d}\mathbf{l}\times\mathbf{r}=-\frac{1}{2}\iint_S(\mathrm{d}\mathbf{S}\times\nabla)\times\mathbf{r}$$

而

$$\begin{aligned}
(\mathrm{d}\mathbf{S}\times\nabla)\times\mathbf{r} &= \varepsilon_{ijk}\mathbf{e}_i(\mathrm{d}\mathbf{S}\times\nabla)_j x_k\\
&= \varepsilon_{ijk}\mathbf{e}_i\left[\varepsilon_{jmn}(\mathrm{d}S)_m\frac{\partial}{\partial x_n}\right]x_k\\
&= \varepsilon_{jki}\varepsilon_{jmn}\mathbf{e}_i(\mathrm{d}S)_m\frac{\partial x_k}{\partial x_n}\\
&= (\delta_{km}\delta_{in}-\delta_{kn}\delta_{im})\mathbf{e}_i(\mathrm{d}S)_m\delta_{kn}\\
&= -2\mathbf{e}_i(\mathrm{d}S)_i\\
&= -2\mathrm{d}\mathbf{S}
\end{aligned}$$

故原式得证.

Dirac Delta 函数是一类重要的函数，它的定义为

$$\delta(\mathbf{r})=\begin{cases}0 & \mathbf{r}\neq\mathbf{0}\\ \infty & \mathbf{r}=\mathbf{0}\end{cases}$$

且对任意包含原点的区域 V，有

$$\int_V\delta(\mathbf{r})\mathrm{d}V=1$$

从物理上这可以理解为一个位于原点处的电荷量为 1 的点电荷在空间中激发的静电场. 电动力学中常用到的 δ 函数是

$$\delta(\mathbf{r})=\frac{1}{4\pi}\nabla\cdot\frac{\mathbf{r}}{r^3}$$

δ 函数的一个重要的性质是

$$\int_V f(\mathbf{r})\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}')\mathrm{d}V=\begin{cases}0 & \mathbf{r}'\notin V\\ f(\mathbf{r}') & \mathbf{r}'\in V\end{cases}$$

6 电磁学回顾

电磁学中的实验定律可以总结为 Maxwell 方程组

$$\nabla\times\mathbf{E}=-\frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t}$$

$$\nabla\times\mathbf{B}=\mu_0\mathbf{J}+\mu_0\varepsilon_0\frac{\partial\mathbf{E}}{\partial t}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$$
$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$$

无外场时介质内部不出现宏观的电荷电流分布，内部的宏观电磁场也为零. 有外场时，介质中正负电荷发生相对位移，有极分子的取向以及分子电流的取向呈现一定的规则性，使介质内部及表面出现宏观的电荷电流分布，这些电荷电流又激发附加的宏观电磁场，与外场叠加形成总电磁场.

对电介质

$$\rho_P = -\nabla \cdot \mathbf{P}$$

对磁介质

$$\mathbf{J}_M = \nabla \times \mathbf{M}$$

引入 $\mathbf{D} = \varepsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P}$ 和 $\mathbf{H} = \dfrac{\mathbf{B}}{\mu_0} - \mathbf{M}$，则介质中的 Maxwell 方程组为

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$$
$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}$$
$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho$$
$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$$

其中 ρ 和 $\mathbf{J}$ 分别是自由电荷密度和传导电流密度.

由 Maxwell 方程组和介质的电磁性能方程可以完全确定介质内部的电磁场的分布. 最简单地，对各向同性线性介质，有

$$\mathbf{D} = \varepsilon \mathbf{E}$$
$$\mathbf{B} = \mu \mathbf{H}$$
$$\mathbf{J} = \sigma \mathbf{E}$$

对介质界面，一般出现面电荷电流分布，使得物理量出现跃变，需要引入边值关系

$$\mathbf{e}_n \times (\mathbf{E}_2 - \mathbf{E}_1) = 0$$
$$\mathbf{e}_n \times (\mathbf{H}_2 - \mathbf{H}_1) = \mathbf{i}$$
$$\mathbf{e}_n \cdot (\mathbf{D}_2 - \mathbf{D}_1) = \sigma$$
$$\mathbf{e}_n \cdot (\mathbf{B}_2 - \mathbf{B}_1) = 0$$

其中 σ 和 $\mathbf{i}$ 分别是面电荷密度和面电流密度.

场和电荷相互作用时，能量在场和电荷之间转移. 此外，能量也可以从场的一个区域转移到另一个区域. 对一定的空间区域 V，其边界为 S，此时能量守恒定律应当表现为：通过 S 流入 V 的能量等于场对 V 内电荷做功的功率与 V 内场能增加率之和. 即

$$\nabla \cdot \mathbf{S} + \frac{\partial \omega}{\partial t} = -\mathbf{f} \cdot \mathbf{v}$$

其中 $\mathbf{S} = \mathbf{E} \times \mathbf{H}$ 为能流密度，也称 Poynting 矢量，$\dfrac{\partial \omega}{\partial t} = \mathbf{E} \cdot \dfrac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} + \mathbf{H} \cdot \dfrac{\partial \mathbf{H}}{\partial t}$ 为场能的变化率，$\mathbf{f}$ 为 Lorentz 力密度，有

$$\mathbf{f} \cdot \mathbf{v} = (\rho \mathbf{E} + \rho \mathbf{v} \times \mathbf{B}) \cdot \mathbf{v} = \mathbf{J} \cdot \mathbf{E}$$

ρ 和 $\mathbf{J}$ 来自全部电荷（自由电荷和束缚电荷）的贡献，因此这不能简单地看成焦耳热.

对真空中的自由电荷，能量在电磁场和自由电荷之间转移. 对介质，场可以对自由电荷做功，转化为电荷的动能，电子与晶格的碰撞等会使一部分动能转化为焦耳热. 场也可以对束缚电荷做功，转化为极化能和磁化能储存在介质中，也有一部分转化为内能（介质损耗），极化能和磁化能由有极分子或分子电流的取向决定，这也对应于一定的宏观电磁场，因此极化能和磁环能可以计入场能考虑.