电磁波的产生与传播

呜哩天才琪露诺

华中科技大学物理学院

日期：2024 年 12 月 23 日

1 平面单色波

对于时谐电磁场 $\mathbf{E}(\mathbf{x},t)=\mathbf{E}(\mathbf{x})e^{-\mathrm{i}\omega t},\mathbf{B}(\mathbf{x},t)=\mathbf{B}(\mathbf{x})e^{\mathrm{i}\omega t}$，均匀各向同性线性介质中的 Maxwell 方程组变为 Helmholtz 方程

$$(\nabla^2+\mu\varepsilon\omega^2)\begin{Bmatrix}\mathbf{E}(\mathbf{x},t)\\ \mathbf{B}(\mathbf{x},t)\end{Bmatrix}=0 \tag{1}$$

以及

$$\nabla\cdot\begin{Bmatrix}\mathbf{E}(\mathbf{x},t)\\ \mathbf{B}(\mathbf{x},t)\end{Bmatrix}=0 \tag{2}$$

平面波解为

$$\begin{aligned}\mathbf{E}(\mathbf{x},t)&=\mathbf{E}_0e^{\mathrm{i}(\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}-\omega t)}\\ \mathbf{B}(\mathbf{x},t)&=\mathbf{B}_0e^{\mathrm{i}(\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}-\omega t)}\end{aligned} \tag{3}$$

其中

$$\mathbf{k}=\sqrt{\mu\varepsilon}\omega\mathbf{n} \tag{4}$$

并要求

$$\mathbf{n}\cdot\begin{Bmatrix}\mathbf{E}_0\\ \mathbf{B}_0\end{Bmatrix}=0 \tag{5}$$

电场强度和磁感应强度的关系有

$$\mathbf{B}=\frac{\mathbf{k}\times\mathbf{E}}{\omega}=\sqrt{\mu\varepsilon}(\mathbf{n}\times\mathbf{E}) \tag{6}$$

磁场强度

$$\mathbf{H}=\frac{\mathbf{B}}{\mu}=\sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}}\mathbf{n}\times\mathbf{E}\equiv\frac{\mathbf{n}\times\mathbf{E}}{Z} \tag{7}$$

其中 $Z\equiv\sqrt{\dfrac{\mu}{\varepsilon}}$ 称为波阻抗.

波的速度

$$v=\frac{\omega}{k}=\frac{1}{\sqrt{\mu\varepsilon}}\equiv\frac{c}{n} \tag{8}$$

其中 $n\equiv\sqrt{\dfrac{\mu\varepsilon}{\mu_0\varepsilon_0}}$ 为折射率.

一个周期内电磁波的平均能流密度是复的 Poynting 矢量

$$\frac{1}{2}\mathbf{E}\times\mathbf{H}^* \tag{9}$$

的实部. 对无色散介质，ε 和 μ 为正实数，为

$$\frac{E_0^2}{2}\sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}}\mathbf{n} \tag{10}$$

2 电磁波的偏振

(3)中的 $\mathbf{E}_0$ 并不总是实矢量，当电磁波是两束相位不同的电磁波的叠加时，$\mathbf{E}_0$ 就是复矢量. 因为 $\mathbf{E}_0$ 在垂直于波矢的平面内，取它的一组基为 $\mathbf{e}_x$ 和 $\mathbf{e}_y$，则可以将 $\mathbf{E}_0$ 分解到两个方向上

$$\mathbf{E}_0 = E_{x0}\mathbf{e}_x + E_{y0}e^{\mathrm{i}\delta}\mathbf{e}_y \tag{11}$$

这里我们选取计时时刻使得 x 方向电场的初相位为 0，δ 就是两个方向上电磁波的相位差.t 时刻 x 和 y 方向上电场的大小为

$$\begin{aligned} E_x &= E_{x0}\cos\phi \\ E_y &= E_{y0}\cos(\phi+\delta) \end{aligned} \tag{12}$$

能够推出

$$\left(\frac{E_x}{E_{x0}}\right)^2 + \left(\frac{E_y}{E_{y0}}\right)^2 - 2\left(\frac{E_x}{E_{x0}}\right)\left(\frac{E_y}{E_{y0}}\right)\cos\delta = \sin^2\delta \tag{13}$$

故电磁波为椭圆偏振. 当 $\delta = m\pi$ 时，退化为线偏振. 当 $\delta = \dfrac{m\pi}{2}$ 且 $E_{x0} = E_{y0}$ 时，为圆偏振.

3 介质界面处的电磁波

取介质界面为 $z=0$，入射、反射、折射波矢为 $\mathbf{k}, \mathbf{k}'$ 和 $\mathbf{k}''$，入射点的位矢为 $\mathbf{x}$，则入射波

$$\begin{aligned} \mathbf{E} &= \mathbf{E}_0 e^{\mathrm{i}(\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}-\omega t)} \\ \mathbf{B} &= \frac{\mathbf{k}\times\mathbf{E}_0}{\omega} e^{\mathrm{i}(\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}-\omega t)} \end{aligned} \tag{14}$$

反射波

$$\begin{aligned} \mathbf{E}' &= \mathbf{E}_0' e^{\mathrm{i}(\mathbf{k}'\cdot\mathbf{x}-\omega t)} \\ \mathbf{B}' &= \frac{\mathbf{k}'\times\mathbf{E}_0'}{\omega} e^{\mathrm{i}(\mathbf{k}'\cdot\mathbf{x}-\omega t)} \end{aligned} \tag{15}$$

折射波

$$\begin{aligned} \mathbf{E}'' &= \mathbf{E}_0'' e^{\mathrm{i}(\mathbf{k}''\cdot\mathbf{x}-\omega t)} \\ \mathbf{B}'' &= \frac{\mathbf{k}''\times\mathbf{E}_0''}{\omega} e^{\mathrm{i}(\mathbf{k}''\cdot\mathbf{x}-\omega t)} \end{aligned} \tag{16}$$

在 $z=0$ 上处处有 $(\mathbf{E}+\mathbf{E}')\times\mathbf{n} = \mathbf{E}''\times\mathbf{n}$，则指数因子必须相同，也就是对 $z=0$ 上任意一点

$$\mathbf{k}\cdot\mathbf{x} = \mathbf{k}'\cdot\mathbf{x} = \mathbf{k}''\cdot\mathbf{x} \tag{17}$$

于是入射波、反射波和折射波共面，这个平面叫做入射面.

由几何关系

$$k\sin\theta = k'\sin\theta' = k''\sin\theta'' \tag{18}$$

故

$$\begin{aligned} \theta &= \theta' \\ \frac{\sin\theta}{\sin\theta''} &= \frac{k''}{k} = \sqrt{\frac{\mu_2\varepsilon_2}{\mu_1\varepsilon_1}} = \frac{n_2}{n_1} \end{aligned} \tag{19}$$

下面我们讨论两种偏振态下反射波、折射波与入射波的关系. 当电场垂直于入射面时，由边值关系

$$\begin{aligned} E_0 + E_0' &= E_0'' \\ \frac{1}{Z_1}(E_0 - E_0')\cos\theta &= \frac{1}{Z_2}E_0''\cos\theta'' \end{aligned} \tag{20}$$

电场平行于入射面的情况类似. 得到

$$\begin{aligned} \left(\frac{E_0'}{E_0}\right)_s &= \frac{Z_2\cos\theta - Z_1\cos\theta''}{Z_2\cos\theta + Z_1\cos\theta''} \\ \left(\frac{E_0''}{E_0}\right)_s &= \frac{2Z_2\cos\theta}{Z_2\cos\theta + Z_1\cos\theta''} \\ \left(\frac{E_0'}{E_0}\right)_s &= \frac{Z_1\cos\theta - Z_2\cos\theta''}{Z_1\cos\theta + Z_2\cos\theta''} \\ \left(\frac{E_0''}{E_0}\right)_s &= \frac{2Z_2\cos\theta}{Z_1\cos\theta + Z_2\cos\theta''} \end{aligned} \tag{21}$$

这是 Fresnel 定律.

当

$$\tan\theta = \tan i_B \equiv \frac{n_2}{n_1} \tag{22}$$

时，由(21)，$(E_0')_p = 0$. 此时，p 偏振的平面单色波完全不被反射，i_B 称为 Brewster 角.

无色散介质中平面单色波的平均能流密度为 $\langle\vec{S}\rangle = \frac{1}{2}\frac{|E_0|^2}{Z}\mathbf{e}_k$，故可以定义反射系数和透射系数

$$R = \frac{\langle\vec{S}''\rangle\cdot\mathbf{n}}{\langle\vec{S}\rangle\cdot\mathbf{n}} = \frac{|E_0''|^2}{|E_0|^2} \tag{23}$$

$$T = \frac{\langle\vec{S}'\rangle\cdot\mathbf{n}}{\langle\vec{S}\rangle\cdot\mathbf{n}} = \frac{Z_1|E_0'|^2\cos\theta'}{Z_2|E_0|^2\cos\theta} \tag{24}$$

当电磁波从折射率高的介质射入折射率低的介质，且入射角 $\sin\theta > \sin i_c = \frac{n_2}{n_1}$ 时，$\sin\theta'' = \frac{n_1}{n_2}\sin\theta > 1$，此时 $\sin\theta''$ 不再有明确的几何意义，而

$$\cos\theta'' = \sqrt{1-\sin^2\theta''} = \mathrm{i}\sqrt{\frac{\sin^2\theta}{\sin^2 i_c} - 1}$$

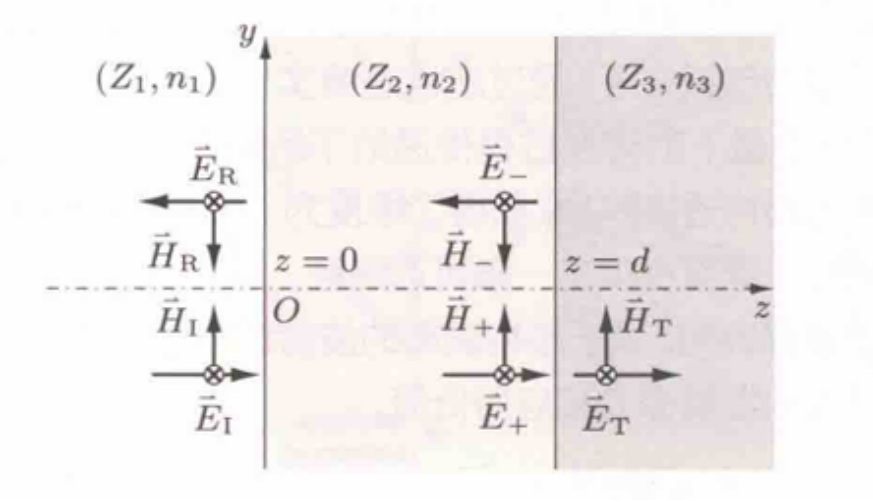
折射波矢 $\mathbf{k}'' = k''(\sin\theta'', 0, \cos\theta'') \equiv (k_x'', 0, \mathrm{i}\kappa)$ 为复矢量. 由 Fresnel 公式，无论对 p 偏振还是对 s 偏振，$\cos\theta''$ 是复数，从而 $\frac{E_0'}{E_0}$ 也是复数，故反射波和入射波将有一相位差. 而 $\left|\frac{E_0'}{E_0}\right| = 1$，反射系数为 1，为全反射.

全反射条件下折射波为

$$\mathbf{E}''(\mathbf{x}, t) = \mathbf{E}_0'' e^{-\kappa z} e^{\mathrm{i}(k_x'' x - \omega t)} \tag{25}$$

说明折射波沿分界面传播，且在 z 方向上指数衰减，是分布在介质 2 内一薄层内的表面波，称为消逝波. 消逝波的相速度 $v_p = \frac{c}{n_1\sin\theta} \in (v_{1p}, v_{2p})$，也就是说，消逝波的相速度介于两种介质中传播的电磁波的相速度.

通过计算，我们可以证明，消逝波沿 z 方向上的能流密度在一个周期内的平均值为 0，而 x 分量的平均值不为 0，即全反射条件下消逝波沿着分界面传输能量.



4 电磁波在多层介质膜中的传播

4.1 单层介质膜透射

考虑一束垂直入射的平面单色波. 在入射区有入射波和反射波

$$\begin{aligned}\mathbf{E}_I &= E_{I0}e^{\mathrm{i}(k_1 z-\omega t)}\mathbf{e}_x\\ \mathbf{E}_R &= E_{R0}e^{\mathrm{i}(-k_1 z-\omega t)}\mathbf{e}_x\end{aligned} \tag{26}$$

在中间介质层有正向传播的波和反向传播的波

$$\begin{aligned}\mathbf{E}_+ &= E_{+0}e^{\mathrm{i}[k_2(z-d)-\omega t]}\mathbf{e}_x\\ \mathbf{E}_- &= E_{-0}e^{\mathrm{i}[-k_2(z-d)-\omega t]}\mathbf{e}_x\end{aligned} \tag{27}$$

在透射区只有透射波

$$\mathbf{E}_T = E_{T0}e^{\mathrm{i}[k_3(z-d)-\omega t]}\mathbf{e}_x \tag{28}$$

考虑到边值关系，可以解得

$$\begin{pmatrix}E_{I0}\\ E_{R0}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\frac{1}{2}\left(1+\frac{Z_1}{Z_2}\right)e^{-\mathrm{i}\phi_2} & \frac{1}{2}\left(1-\frac{Z_1}{Z_2}\right)e^{+\mathrm{i}\phi_2}\\ \frac{1}{2}\left(1-\frac{Z_1}{Z_2}\right)e^{-\mathrm{i}\phi_2} & \frac{1}{2}\left(1+\frac{Z_1}{Z_2}\right)e^{+\mathrm{i}\phi_2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}E_{+0}\\ E_{-0}\end{pmatrix} \tag{29}$$

以及

$$\begin{pmatrix}1 & 1\\ \frac{1}{Z_2} & -\frac{1}{Z_2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}E_{+0}\\ E_{-0}\end{pmatrix} = E_{T0}\begin{pmatrix}1\\ \frac{1}{Z_3}\end{pmatrix} \tag{30}$$

如果我们要求 $E_{R0}=0$，即要求介质膜具有增透效果，则需要

$$\begin{cases}n_1\cos\phi_2 = n_3\cos\phi_2\\ n_2^2\sin\phi_2 = n_1 n_3\sin\phi_2\end{cases} \tag{31}$$

若 $n_1\neq n_3$，则必须 $\cos\phi_2=0$. 必然有

$$\begin{aligned}\phi_2 &= \frac{2m+1}{2}\pi\\ n_2 &= \sqrt{n_1 n_3}\end{aligned} \tag{32}$$

4.2 F-P 共振腔

若 $n_1 = n_3$，则只要求 $\phi_2 = m\pi$. 设入射波长为 λ_0，则膜的厚度应为 $d = \dfrac{m\lambda_0}{2n_2}$，即膜的厚度为电磁波在介质中的半波长的整数倍时，才能够实现完全透射，这个条件与膜的背景介质完全无关.

引入参数

$$R = \frac{(n_1 - n_2)^2}{(n_1 + n_2)^2} \tag{33}$$

这正是光垂直入射到两种介质界面时的反射系数. 计算可知，膜的透射率

$$\left|\frac{E_{T0}}{E_{I0}}\right|^2 = \left[1 + \frac{4R}{(1-R)^2}\sin^2\phi_2\right]^2 \tag{34}$$

当 n_1 与 n_2 相差很大以至于 $R \to 1$ 时，一旦 ϕ_2 偏离了完全透射的条件，透射率就会急剧下降，从而形成选择性的共振透射. 两块表面平行、中间空隙宽度为半波长整数倍的介质片组成的共振腔称为 F-P 共振腔. 因为它对特定波长的电磁波完全透射，而几乎不透过其它电磁波，所以可用来对入射光谱进行选择性分析.

5 电磁波在色散介质中的传播

5.1 经典色散模型

介质中电子被束缚于分子内，可采用带阻尼的谐振子模型. 在外场作用下，电子的运动方程为

$$m(\ddot{\mathbf{x}} + \gamma\dot{\mathbf{x}} + \omega_0^2\mathbf{x}) = -e\mathbf{E}_0 e^{-\mathrm{i}\omega t} \tag{35}$$

其解为

$$\mathbf{x} = \frac{e}{m}\frac{1}{\omega_0^2 - \omega^2 - \mathrm{i}\gamma\omega}\mathbf{E}_0 e^{-\mathrm{i}\omega t} \tag{36}$$

对设单位体积内分子的数目为 N，则极化强度

$$\mathbf{p} = -\frac{Ne^2}{m}\sum_j \frac{f_j}{\omega_j^2 - \omega^2 - \mathrm{i}\gamma_j\omega}\mathbf{E}_0 e^{-\mathrm{i}\omega t} \tag{37}$$

其中 f_j 为单个分子中回复力为 ω_j 的电子的数目. 故相对介电常数

$$\varepsilon_r(\omega) = 1 + \frac{Ne^2}{m}\sum_j \frac{f_j}{\omega_j^2 - \omega^2 - \mathrm{i}\gamma_j\omega} \equiv 1 + \omega_p^2\sum_j \frac{f_j}{\omega_j^2 - \omega^2 - \mathrm{i}\gamma_j\omega} \tag{38}$$

其中 $\omega_p \equiv \dfrac{Ne^2}{m}$ 称为材料的等离子体频率.

对一般的材料而言，$\gamma_j \ll \omega_j$，故对大部分频率的电磁波而言，介质的相对介电常数都是正实数. 因子 $(\omega_j^2 - \omega^2)^{-1}$ 对 $\omega < \omega_j$ 而言为正，对 $\omega > \omega_0$ 而言为负，一般 $\mathrm{Re}\,\varepsilon_r$ 随着 ω 的增大而增大. 而当 ω 接近某个 ω_j 时，$\omega_j^2 - \omega^2 \sim 0$，而 γ_j 极小，故 $\mathrm{Re}\,\varepsilon_r$ 急剧减小而 $\mathrm{Im}\,\varepsilon_r$ 急剧增大，这一现象称为反常色散. 因为 ε_r 有虚部，电磁波的波数也将出现虚部，进而出现衰减项，这称为共振吸收.

设对某个 $\omega_0 = 0$，这意味着作用在某些电子上的束缚力消失了，也就意味着介质中有自由电子存在，故介质具有导电性. 用 ε_b 表示其它电子的贡献，此时相对介电常数

$$\varepsilon_r(\omega) = \varepsilon_b(\omega) - f_0\frac{\omega_p^2}{\omega^2 + \mathrm{i}\omega\gamma_0} \tag{39}$$

对这些自由电子，(36)变为

$$\mathbf{x} = -\frac{e}{m}\frac{1}{\omega^2 + \mathrm{i}\gamma\omega}\mathbf{E}_0 e^{-\mathrm{i}\omega t} \tag{40}$$

电流

$$\mathbf{J} = -Ne\frac{\mathrm{d}\mathbf{x}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{i}Ne^2\omega}{m}\frac{\omega_p^2}{\omega^2 + \mathrm{i}\gamma\omega}\mathbf{E}_0 e^{-\mathrm{i}\omega t} \tag{41}$$

故电导率

$$\sigma = \frac{\varepsilon_0 \omega_p^2}{\gamma - \mathrm{i}\omega} \tag{42}$$

于是导电媒质的介电常数可以表示为

$$\varepsilon(\omega) = \varepsilon_b(\omega) + \mathrm{i}\sigma \tag{43}$$

对金属而言，其中全是自由电子，$\varepsilon_b = \varepsilon_0$，则

$$\varepsilon_r(\omega) = 1 + \frac{\mathrm{i}\sigma}{\omega\varepsilon_0} \tag{44}$$

5.2 色散媒质中电磁波的传播

对一般的媒介质而言，$\varepsilon(\omega)$ 为复数，故波矢一般不是实矢量，设 $\mathbf{k} = \beta + \mathrm{i}\alpha$，则

$$\mathbf{k}^2 = \mu\varepsilon\omega^2 = \mu\omega^2(\varepsilon' + \mathrm{i}\varepsilon'') \tag{45}$$

即

$$\begin{cases} \beta^2 - \alpha^2 = \mu\varepsilon'\omega^2 = k_0^2\varepsilon_r' \\ \alpha \cdot \beta = \dfrac{\mu\varepsilon''\omega^2}{2} = \dfrac{k_0^2\varepsilon_r''}{2} \end{cases} \tag{46}$$

则导电媒介质中的电磁波为

$$\mathbf{E}(\mathbf{R}, t) = \mathbf{E}_0 e^{-\alpha\cdot\mathbf{R}} e^{\mathrm{i}(\beta\cdot\mathbf{R} - \omega t)} \tag{47}$$

较为简单的情形是电磁波垂直入射导体，β 和 α 都平行于 $\mathbf{n}$，则(46)中的 α 和 β 为实数，其解为

$$\begin{aligned} \beta &= k_0\sqrt{\frac{\varepsilon_r'}{2}}\left[\sqrt{1 + \left(\frac{\varepsilon_r''}{\varepsilon_r'}\right)^2} + 1\right]^{\frac{1}{2}} \\ \alpha &= k_0\sqrt{\frac{\varepsilon_r'}{2}}\left[\sqrt{1 + \left(\frac{\varepsilon_r''}{\varepsilon_r'}\right)^2} - 1\right]^{\frac{1}{2}} \end{aligned} \tag{48}$$

媒介质中的电磁波为

$$\mathbf{E}(\mathbf{R}, t) = \mathbf{E}_0 e^{-\alpha z} e^{\mathrm{i}(\beta z - \omega t)} \tag{49}$$

定义电磁波衰减为原本的 $\dfrac{1}{e}$ 所传播的距离为穿透深度 δ，对垂直入射情形

$$\delta = \frac{1}{\alpha} \tag{50}$$

对低频情况，σ 近似为实数，故 $\varepsilon_r' = \varepsilon_b, \varepsilon_r'' = \dfrac{\sigma}{\omega\varepsilon_0}$. 又 $\varepsilon_b(\omega) > 1$，故 $\varepsilon_r' > 1$，故 α 和 β 都是实数. 当导体的电导率较小，即 $\dfrac{\sigma}{\omega\varepsilon_b} \ll 1$ 时，有

$$\begin{aligned} \beta &\approx k_0\sqrt{\frac{\varepsilon_b}{\varepsilon_0}} \\ \alpha &\approx \frac{\sigma}{2}\sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon_b}} \end{aligned} \tag{51}$$

当导体的电导率较大，即 $\dfrac{\sigma}{\omega\varepsilon_b} \gg 1$ 时，有

$$\alpha \approx \beta \approx k_0\sqrt{\frac{\sigma}{2\omega\varepsilon_0}} \tag{52}$$

考虑垂直入射到导体表面的电磁波，则存在入射波、折射波和反射波. 选取计时时刻使得折射波的初相位为 0，则折射波为

$$\mathbf{E}''(\mathbf{R},t)=E_0''e^{-\alpha z}e^{\mathrm{i}(\beta z-\omega t)}\mathbf{e}_y \tag{53}$$

因为折射波矢 $\mathbf{k}''=(\beta+\mathrm{i}\alpha)\mathbf{e}_z$ 为复矢量，折射波的磁场

$$\mathbf{H}''=\frac{1}{\omega\mu}\mathbf{k}''\times\mathbf{E}''=-\frac{1}{\omega\mu}(\beta+\mathrm{i}\alpha)E''\mathbf{e}_x \tag{54}$$

与电场有一相位差，但不是 $\dfrac{\pi}{2}$. 计算可知，能流密度平均值

$$\langle\mathbf{s}''\rangle=\frac{\beta}{2\omega\mu}e^{-2\alpha z}(E_0'')^2\mathbf{e}_z \tag{55}$$

计算可知进入导电媒质的这部分能量全部变为 Joule 热. 另一方面，由边界条件可知，对垂直入射情形，反射波与入射波的关系为

$$\frac{E'}{E}=\frac{k_0-\beta-\mathrm{i}\alpha}{k_0+\beta+\mathrm{i}\alpha} \tag{56}$$

对低频情况，β 为实数，可求得反射系数

$$R=\left|\frac{E'}{E}\right|=\frac{(k_0-\beta)^2+\alpha^2}{(k_0+\beta)^2+\alpha^2} \tag{57}$$

对非低频的情况，$\sigma=\dfrac{\varepsilon_0\omega_p^2}{\gamma-\mathrm{i}\omega}=\dfrac{\varepsilon_0\omega_p^2}{\gamma^2+\mathrm{i}\omega^2}(\gamma-\mathrm{i}\omega)$. 对金属导体 $\varepsilon_b=\varepsilon_0$，于是 $\varepsilon_r'=1-\dfrac{\omega_p^2}{\omega^2+\gamma^2}$，$\varepsilon_r'=\dfrac{\gamma\omega_p^2}{\omega(\omega^2+\gamma^2)}$. 对 $\omega<\omega_p$，因为 $\gamma\ll\omega_p$，有 $\varepsilon_r'<0$，此时 α 和 β 将是纯虚数. 令 $\beta=\mathrm{i}\beta',\alpha=-\mathrm{i}\alpha'$，则垂直入射情形下媒介质中的折射波为

$$\mathbf{E}''(\mathbf{R},t)=E_0''e^{-\beta' z}e^{\mathrm{i}(\alpha' z-\omega t)}\mathbf{e}_y \tag{58}$$

其它的讨论类似. 反射波与入射波的关系为

$$\frac{E'}{E}=\frac{k_0-\alpha'-\mathrm{i}\beta'}{k_0+\alpha'+\mathrm{i}\beta'} \tag{59}$$

反射系数

$$R=\left|\frac{E'}{E}\right|^2=\frac{(k_0-\alpha')^2+\beta'^2}{(k_0+\alpha')^2+\beta'^2} \tag{60}$$

6 波导与谐振腔

6.1 矩形波导中的场模

在矩形波导中，设电磁波沿 z 方向传播，则 $\mathbf{E}(\mathbf{R},t)$ 会有一个传播因子

$$\begin{aligned}\mathbf{E}(\mathbf{R},t)&=\mathbf{E}(x,y)e^{\mathrm{i}(k_z z-\omega t)}\\ \mathbf{B}(\mathbf{R},t)&=\mathbf{B}(x,y)e^{\mathrm{i}(k_z z-\omega t)}\end{aligned} \tag{61}$$

Helmholtz 方程变为

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+k_t^2\right)\begin{Bmatrix}\mathbf{E}(x,y)\\ \mathbf{B}(x,y)\end{Bmatrix}=0 \tag{62}$$

其中 $k_t^2 = k^2 - k_z^2$，可以证明电磁场的所有分量都可以用 z 轴分量表示

$$\begin{aligned} E_x &= \frac{\mathrm{i}}{k_t^2}\left(k_z\frac{\partial E_z}{\partial x} + \omega\mu\frac{\partial H_z}{\partial y}\right) \\ E_y &= \frac{\mathrm{i}}{k_t^2}\left(k_z\frac{\partial E_z}{\partial y} - \omega\mu\frac{\partial H_z}{\partial x}\right) \\ H_x &= \frac{\mathrm{i}}{k_t^2}\left(k_z\frac{\partial H_z}{\partial x} - \omega\varepsilon\frac{\partial E_z}{\partial y}\right) \\ H_y &= \frac{\mathrm{i}}{k_t^2}\left(k_z\frac{\partial H_z}{\partial y} + \omega\varepsilon\frac{\partial E_z}{\partial x}\right) \end{aligned} \tag{63}$$

矩形波导不支持 TEM 导模，即 E_z 和 H_z 不能同时为 0. 对 TE 导模，电场只有横向分量，即 $E_z = 0, H_z \neq 0$. 我们求出 H_z，则电磁场的其它分量都可以通过(63)求出.H_z 满足的方程为

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + k_t^2\right) H_z(x,y) = 0 \tag{64}$$

其通解为

$$H_z(x,y) = [C_1\cos(k_x x) + D_1\sin(k_x x)]\cdot[C_2\cos(k_y y) + D_2\sin(k_y y)] \tag{65}$$

金属内电场为 0，故边界条件为

$$E_y(x,y)|_{y=0} \equiv 0, E_y(x,y)|_{x=0} \equiv 0, E_y(x,y)|_{x=a} \equiv 0, E_x(x,y)|_{y=b} \equiv 0 \tag{66}$$

则电磁场的解为

$$H_z(x,y) = H_0\cos\left(\frac{m\pi}{a}x\right)\cos\left(\frac{n\pi}{b}y\right) \tag{67}$$

这样的模式称为 TE_{mn} 模式. 可见，矩形波导管中 (k_x, k_y) 只能取分列的值.

对 TM 波模，磁场只有横向分量，$H_z = 0, E_z \neq 0$，电磁场的解为

$$E_z(x,y) = E_0\sin\left(\frac{m\pi}{a}x\right)\sin\left(\frac{n\pi}{b}y\right) \tag{68}$$

电磁场的其它分量可以通过(63)求出. 这样的模式称为 TM_{mn} 模式.

对固定的模式，要有 k_z 为实数，则 $k^2 > k_t^2$，即

$$\omega > \frac{\pi}{\sqrt{\mu\varepsilon}}\sqrt{\left(\frac{m}{a}\right)^2 + \left(\frac{n}{b}\right)^2} \tag{69}$$

一般而言 TE_{mn} 和 TM_{mn} 的色散线相同，称为模式简并，一定频率的电磁波进入波导后，可能以两者混合的形式同时传播. 因为波导中不存在 TM_{0n} 和 TE_{m0} 导模，TE_{0n} 和 TM_{m0} 都是非简并导模.

6.2 谐振腔

谐振腔中的 TE 共振模可看成两束同振幅反向传播 TE 导模的叠加，其磁场的纵向分量为

$$H_z = H_0\cos\left(\frac{m\pi}{a}x\right)\cos\left(\frac{n\pi}{b}y\right)\sin\left(\frac{l\pi}{d}z\right)e^{-\mathrm{i}\omega t} \tag{70}$$

其共振波数为

$$k_{m,n,l} = \sqrt{\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} + \frac{l^2}{d^2}} \tag{71}$$

对 TM 共振模式，类似地

$$E_z = E_0\sin\left(\frac{m\pi}{a}x\right)\sin\left(\frac{n\pi}{b}y\right)\cos\left(\frac{l\pi}{d}z\right)e^{-\mathrm{i}\omega t} \tag{72}$$

7 电磁波的辐射

7.1 库伦规范与洛伦兹规范

由 Maxwell 方程组可知 $\mathbf{B}$ 是无旋的，令 $\mathbf{B}=\nabla\times\mathbf{A}$，代入 $\nabla\times\mathbf{E}=-\dfrac{\partial\mathbf{B}}{\partial t}$ 可知 $\mathbf{E}+\dfrac{\partial\mathbf{A}}{\partial t}$ 也是无旋的，令 $\mathbf{E}+\dfrac{\partial\mathbf{A}}{\partial t}=-\nabla\varphi$. 故

$$\begin{aligned}\mathbf{E}&=-\nabla\varphi-\frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t}\\ \mathbf{B}&=\nabla\times\mathbf{A}\end{aligned}\tag{73}$$

标势和矢势的选取具有一定的任意性，作变换 $\mathbf{A}'=\mathbf{A}+\nabla\Lambda,\varphi'=\varphi-\dfrac{\partial\Lambda}{\partial t}$，则得到的电磁场是相同的. 标势和矢势的一种选择方法叫做一种规范.

把(73)代入 Maxwell 方程组得

$$\begin{aligned}\nabla^2\varphi+\frac{\partial}{\partial t}(\nabla\cdot\mathbf{A})&=-\frac{\rho}{\varepsilon_0}\\ \nabla^2\mathbf{A}-\mu_0\varepsilon_0\frac{\partial^2\mathbf{A}}{\partial t^2}&=-\mu_0\mathbf{J}+\nabla\left(\nabla\cdot\mathbf{A}+\mu_0\varepsilon_0\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right)\end{aligned}\tag{74}$$

库伦规范是指

$$\nabla\cdot\mathbf{A}=0\tag{75}$$

在这种规范下

$$\begin{aligned}\nabla^2\varphi&=-\frac{\rho}{\varepsilon_0}\\ \nabla^2\mathbf{A}-\mu_0\varepsilon_0\frac{\partial^2\mathbf{A}}{\partial t^2}&=-\mu_0\mathbf{J}+\mu_0\varepsilon_0\frac{\partial}{\partial t}\nabla\varphi\end{aligned}\tag{76}$$

在这种规范下，φ 只由某一时刻的电势分布决定，其解为

$$\varphi(\mathbf{R},t)=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_V\frac{\rho(\mathbf{R}',t)}{|\mathbf{R}-\mathbf{R}'|}\mathrm{d}V'$$

另一方面，可以把 $\mathbf{J}$ 分为无旋和无源的两部分

$$\begin{aligned}\mathbf{J}_l&=-\frac{1}{4\pi}\nabla\int_V\frac{\nabla'\cdot\mathbf{J}}{|\mathbf{R}-\mathbf{R}'|}\mathrm{d}V'\\ \mathbf{J}_t&=\frac{1}{4\pi}\nabla\times\nabla\times\int_V\frac{\mathbf{J}}{|\mathbf{R}-\mathbf{R}'|}\mathrm{d}V'\end{aligned}\tag{77}$$

则由电流的连续性方程可得 $\mu_0\varepsilon_0\nabla\dfrac{\partial\varphi}{\partial t}=\mu_0\mathbf{J}_l$，于是(76)的第二式变为

$$\nabla^2\mathbf{A}-\mu_0\varepsilon_0\frac{\partial^2\mathbf{A}}{\partial t^2}=-\mu_0\mathbf{J}_t\tag{78}$$

即磁矢势是波动的，它的源是横向电流.

洛伦兹规范是指

$$\nabla\cdot\mathbf{A}+\mu_0\varepsilon_0\frac{\partial\varphi}{\partial t}=0\tag{79}$$

在这种规范下

$$\begin{aligned}\nabla^2\varphi-\mu_0\varepsilon_0\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2}&=-\frac{\rho}{\varepsilon_0}\\ \nabla^2\mathbf{A}-\mu_0\varepsilon_0\frac{\partial^2\mathbf{A}}{\partial t^2}&=-\mu_0\mathbf{J}\end{aligned}\tag{80}$$

7.2 推迟势

从(80)可以解得

$$\begin{aligned}\varphi(\mathbf{R},t)&=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_V\frac{\rho(\mathbf{R}',t_{\text{rec}})}{|\mathbf{R}-\mathbf{R}'|}\mathrm{d}V'\\ \mathbf{A}(\mathbf{R},t)&=\frac{\mu_0}{4\pi}\int_V\frac{\mathbf{J}(\mathbf{R}',t_{\text{rec}})}{|\mathbf{R}-\mathbf{R}'|}\mathrm{d}V'\end{aligned}\tag{81}$$

其中 $t_{\text{rec}}\equiv t-\dfrac{r}{c}=t-\dfrac{|\mathbf{R}-\mathbf{R}'|}{c}$. 这个解表明决定 t 时刻电磁势的是先前的电荷电流分布，即电荷电流激发的电磁场需要一段时间的传播，称为推迟解.

7.3 推斥势的多级展开

下面我们只计算磁矢势，电势可以从洛伦兹规范求得. 设电流时谐变化，即 $\mathbf{J}(\mathbf{R}',t)=\mathbf{J}(\mathbf{R}')e^{-\mathrm{i}\omega t}$，则

$$\mathbf{A}(\mathbf{R},t)=\frac{\mu_0e^{-\mathrm{i}\omega t}}{4\pi}\int_V\frac{\mathbf{J}(\mathbf{R}')e^{\mathrm{i}kr}}{r}\mathrm{d}V\tag{82}$$

其中 $k\equiv\dfrac{\omega}{c}=\dfrac{2\pi f}{c}=\dfrac{2\pi}{\lambda}$.

设电流只分布在很小的区域内，即电流分布的线度 $l\ll\lambda$. 对近场区，$l\ll r\ll\lambda$，推迟因子 $e^{\mathrm{i}kr}\sim1$，推迟效应可忽略不计.$r\sim\lambda$ 称为感应区或过渡区，我们不研究这部分区域. 对远场区或辐射区，$r\gg\lambda$，将坐标原点选在电流分布区域内某一点，近似有

$$r=|\mathbf{R}-\mathbf{R}'|\sim R-\mathbf{e}_R\cdot\mathbf{R}'\tag{83}$$

故

$$\begin{aligned}\mathbf{A}(\mathbf{R},t)&=\frac{\mu_0}{4\pi R}e^{\mathrm{i}(kR-\omega t)}\int_V\mathbf{J}(\mathbf{R}')\exp(-\mathrm{i}k\mathbf{e}_R\cdot\mathbf{R}')\cdot\left(1-\frac{\mathbf{e}_R\cdot\mathbf{R}'}{R}\right)^{-1}\mathrm{d}V'\\&\approx\frac{\mu_0}{4\pi R}e^{\mathrm{i}(kR-\omega t)}\int_V\mathbf{J}(\mathbf{R}')(1-\mathrm{i}k\mathbf{e}_R\cdot\mathbf{R}')\mathrm{d}V'\\&\equiv[\mathbf{A}^{(0)}(\mathbf{R})+\mathbf{A}^{(1)}(\mathbf{R})]e^{-\mathrm{i}\omega t}\end{aligned}\tag{84}$$

其中零级展开项

$$\begin{aligned}\mathbf{A}^{(0)}(\mathbf{R})&\equiv\frac{\mu_0}{4\pi R}e^{\mathrm{i}kR}\int_V\mathbf{J}(\mathbf{R}')\mathrm{d}V'\\&=-\frac{\mu_0}{4\pi R}e^{\mathrm{i}kR}\int_V(\nabla'\cdot\mathbf{J})\mathbf{R}'\mathrm{d}V'\\&=\frac{\mu_0}{4\pi R}e^{\mathrm{i}kR}\int_V\frac{\partial\rho}{\partial t}\mathbf{R}'\mathrm{d}V'\\&=-\mathrm{i}\omega\frac{\mu_0e^{\mathrm{i}kR}}{4\pi R}\int_V\rho\mathbf{R}'\mathrm{d}V'\\&=-\mathrm{i}\omega\frac{\mu_0e^{\mathrm{i}kR}}{4\pi R}\mathbf{p}\end{aligned}\tag{85}$$

则

$$\mathbf{A}^{(0)}(\mathbf{R},t)=-\mathrm{i}\omega\frac{\mu_0e^{\mathrm{i}kR}}{4\pi R}\mathbf{p}e^{-\mathrm{i}\omega t}=\frac{\mu_0e^{\mathrm{i}kR}}{4\pi R}\dot{\mathbf{p}}\tag{86}$$

于是零级近似就是时谐电偶极子的辐射.

计算远场区的辐射场时，可做如下代换

$$\begin{aligned}\nabla&\Rightarrow\mathrm{i}k\mathbf{e}_R\\\frac{\partial}{\partial t}&\Rightarrow-\mathrm{i}\omega\end{aligned}\tag{87}$$

计算可知时谐偶极子的辐射磁场

$$\mathbf{B}^{(0)}(\mathbf{R},t)=\frac{\mu_0}{4\pi c}\frac{e^{\mathrm{i}kR}}{R}\ddot{\mathbf{p}}(t)\times\mathbf{e}_R \tag{88}$$

设电偶极矩沿 z 轴振荡，计算可知电场和磁场都垂直于辐射方向，且互相垂直、相位相同. 电磁场的振幅在辐射过程中具有 R^{-1} 依赖关系. 辐射能流绕极轴有旋转对称性，其角分布由因子 $\sin^2\theta$ 决定. 总辐射功率与距离无关，体现了能量守恒.

可以将一级展开项中的张量 $\mathbf{R}'\mathbf{J}$ 分解为对称部分和反对称部分，得

$$\begin{aligned}\mathbf{A}_m^{(1)}(\mathbf{R})&=\frac{-\mathrm{i}k\mu_0}{4\pi R}e^{\mathrm{i}(kR-\omega t)}\mathbf{e}_R\cdot\frac{1}{2}\int_V\mathrm{d}V'(\mathbf{R}'\mathbf{J}-\mathbf{J}\mathbf{R}')\\ \mathbf{A}_D^{(1)}(\mathbf{R})&=\frac{-\mathrm{i}k\mu_0}{4\pi R}e^{\mathrm{i}(kR-\omega t)}\mathbf{e}_R\cdot\frac{1}{2}\int_V\mathrm{d}V'(\mathbf{R}'\mathbf{J}+\mathbf{J}\mathbf{R}')\end{aligned} \tag{89}$$